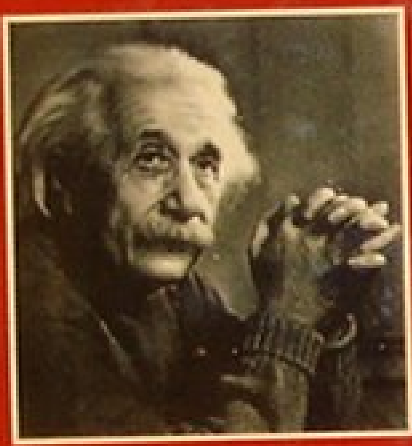
থিওরি অফ রিলেটিভিটি

মুহম্মদ জাফর ইকবাল



প্রকাশনার ছয় দশকে
মাওলা ব্রাদার্স

দ্বিতীয় মুদ্রণ
ফেব্রুয়ারি ২০০৮
প্রথম প্রকাশ
ফাল্গুন ১৪১৪
ফেব্রুয়ারি ২০০৮

প্রকাশক
আহমেদ মাহমুদুল হক
মাওলা ব্রাদার্স
৩৯ বাংলাবাজার, ঢাকা ১১০০
ফোন : ৭১৭৫২২৭ ৭১১৯৪৬৩
ই-মেইল : mowla@accesstel.net

প্রচ্ছদ
ধ্রুব এষ

কম্পোজ
বাংলাবাজার কম্পিউটার
৩৪ নর্থব্রুক হল রোড ৩য় তলা
ঢাকা ১১০০

মুদ্রণ
নিউ এস আর প্রেস
৩৪ শ্রীশ দাস লেন ঢাকা ১১০০

দাম
একশত টাকা মাত্র

ISBN 984 70156 0041 9

THEORY OF REALITYVITY by Muhammed Zafar Iqbal. Published by Ahmed Mahmudul Haque of Mowla Brothers 39 Banglabazar, Dhaka 1100. Cover Designed by Dhruba Esh; Price : Taka One Hundred only.

ভূমিকা

একটা দেশকে গড়ে তুলতে হলে যেমন ডাক্তার, ইঞ্জিনিয়ার, ম্যানেজার দরকার ঠিক সেরকম বিজ্ঞানীও দরকার। আমরা যখন ছোট ছিলাম তখন স্বপ্ন দেখতাম বড় হয়ে বিজ্ঞানী হব– বড় হয়ে যখন বিজ্ঞান নিয়ে একটুআধটু কাজ করতে পেরেছি তখন মনে হয়েছে এর চাইতে মজা আর কী হতে পারে? পৃথিবীতে যতরকম আনন্দ আছে তার মাঝে সবচেয়ে বেশি আনন্দ হচ্ছে গবেষণাতে– যারা সেটা করেছে তারা সেটা জানে। আমার খুব মায়া হয় যখন দেখি আজকালকার ছেলেমেয়েরা আর বিজ্ঞানী হতে চায় না– তারা শুধু ডাক্তার, ইঞ্জিনিয়ার আর ম্যানেজার হতে চায়। মাঝে মাঝে দুই-একজন যখন বিজ্ঞানী হতে চায়, তাদের বাবা-মায়েরা তখন জোর করে তাদের ডাক্তার, ইঞ্জিনিয়ার আর ম্যানেজার তৈরি করে ফেলেন। তাই আমাদের দেশে এখন চমৎকার সব চমৎকার ডাক্তার, ইঞ্জিনিয়ার আর ম্যানেজার কিন্তু বিজ্ঞানীর খুব অভাব!

এই বইটা তাই লেখা হয়েছে বিজ্ঞানের জন্যে একটু আগ্রহ তৈরি করার উদ্দেশ্যে। পৃথিবীর ইতিহাসে বিজ্ঞানের যত আবিষ্কার হয়েছ তার মাঝে অন্যতম হচ্ছে থিওরি অফ রিলেটিভিটি এবং সবচেয়ে চমকপ্রদ ব্যাপার হচ্ছে স্কুলের গণিত জানলেই এই থিওরিটি বোঝা সম্ভব। কাজেই তেরো চৌদ্দ বছরের ছেলেমেয়েদের লক্ষ্য করে আমি এই বইটি লিখেছি–কেউ যেন মনে না করে খুব কঠিন একটা জিনিস একটু ছেলেমানুষি করে এখানে বলা হয়েছে। এখানে একেবারে সত্যিকারের থিওরি অফ রিলেটিভিটির কথা বলা হয়েছে, কেউ যদি এটা পড়ে

তার সবকিছু বোঝে সে বুকে থাবা দিয়ে বলতে পারবে, "আমি থিওরি অফ রিলেটিভিটি জানি!"

কেউ যদি থিওরি অফ রিলেটিভিটি জানে শুধুমাত্র তা হলেই সে প্রথমবার অনুভব করতে পারবে আমাদের চারপাশের জগৎ কত রহস্যময়। তার চাইতে বড় কথা সে বুঝবে এই রহস্যের একটি পৃষ্ঠা তার জন্যে উন্মোচিত হয়েছে—সামনে আরো না জানি আরো কত পৃষ্ঠা উন্মোচিত হবার জন্য অপেক্ষা করছে।

এই বইটা পড়ে একটা ছেলে বা মেয়েও যদি ঠিক করে আমি বড় হয়ে বিজ্ঞানী হব, আমি তা হলে মনে করব আমার পরিশ্রমটা সার্থক হয়েছে!

ঢাকা
২৬ ডিসেম্বর ২০০৭

মুহম্মদ জাফর ইকবাল

সূচিপত্র

রিলেটিভিটির শুরু

দুটি অসাধারণ সূত্র

আইনস্টাইনের স্পেশাল থিওরি অফ রিলেটিভিটি গড়ে উঠেছে দুটি সূত্র দিয়ে। সূত্র দুটি এরকম:

1. পদার্থবিজ্ঞান সব জায়গায় এক
2. আলোর গতিবেগ সব জায়গায় এক

আমি জানি যারা এই সূত্র দুটি পড়েছে তারা সবাই নিশ্চয়ই মাথা চুলকে বলছে, এগুলো আবার কী রকম সূত্র হলো? আমরা তো জানি পদার্থবিজ্ঞান সব জায়গায় একই হবে–ঢাকায় পদার্থবিজ্ঞান কি চট্টগ্রামের পদার্থবিজ্ঞান থেকে ভিন্ন হবে? আলোর গতিবেগও তো একই হতে হবে, সূর্য থেকে আলো পৃথিবীতে পৌঁছাতে কোথাও বেশি সময় লাগছে কোথাও কম সময় লাগছে এটা কি হতে পারে?

ইনারশিয়াল রেফারেন্স ফ্রেম

কাজেই আমার মনে হয় সব জায়গা বলতে আমি কী বোঝাচ্ছি সেটা প্রথমেই পরিষ্কার করে নেয়া ভাল। মনে করো তুমি একটা স্টেশনে একটা ট্রেনে বসে আছ, তোমার সামনে অন্য একটি রেললাইনে আরেকটি ট্রেন দাঁড়িয়ে আছে। ভীষণ কুয়াশা পড়েছে তাই তুমি সামনের ট্রেন ছাড়া আর কিছুই দেখতে পারছ না। এখন মনে করো একটা ট্রেন চলতে শুরু করেছে - তুমি কি বলতে পারবে কোনটা?

যারা তর্ক করতে পছন্দ করে তারা বলবে, "অবশ্যই বলতে পারব, ট্রেন যখন চলতে থাকে তখন রেল লাইনের সাথে ঘটঘট শব্দ হয়, ট্রেন কাঁপে, দোলে– কাজেই বলতে না পারার কী আছে? যখন দেখব আমার ট্রেন কাঁপছে, দুলছে, ঘটঘট শব্দ করছে, বুঝতে পারব আমার ট্রেনটা চলছে।"

অকাট্য যুক্তি–তাই আমার কল্পনাটাও আরেকটু বাড়িয়ে দিই। আমরা কল্পনা করে নিই, দুটি ট্রেনই অসাধারণ; এগুলো যখন চলতে থাকে তখন সেগুলো কাঁপে না, দোলে না, ঘটঘট শব্দ করে না।

যারা তর্ক পছন্দ করে তারা বলবে, "জানালা দিয়ে মাথা বের করে দেব, যদি মাথায় বাতাস লাগে বুঝব ট্রেনটা চলছে।" আমিও তখন বলব, "জানালা বন্ধ করে দেয়া হয়েছে, কাচের ভেতর দিয়ে শুধু সামনের ট্রেনটি দেখা যাচ্ছে, তার বেশি কিছু নয়।"

আমার ধারণা যারা বিজ্ঞান নিয়ে খুব বেশি মাথা ঘামায় না, শুধু তর্ক করতে পছন্দ করে তারা এ পর্যায়ে এসে থেমে যাবে, কোন ট্রেনটি চলছে সে কিছুতেই বলতে পারবে না। তোমাদের ভেতর যারা বিজ্ঞান নিয়ে চিন্তাভাবনা করো তারা হয়তো এত সহজে হাল ছেড়ে দেবে না, তারা বলবে, "ট্রেনটা ঠিক যখন সামনে চলতে শুরু করে আমরা তখন পিছনে পড়ে যেতে চাই। তাই আমরা দেখব আমরা পড়ে যেতে শুরু করেছি কি না। যদি দেখি পিছনে পড়ে যেতে শুরু করেছি তার মানে ট্রেনটা সামনে চলতে শুরু করেছে। আর যদি দেখি সামনে হুমড়ি খেয়ে পড়ার অবস্থা হয়েছে তা হলে বুঝব ট্রেনটা পিছন দিকে যাচ্ছে। আর যদি সেরকম কিছুই হয় নি, তাহলে বুঝব আমার ট্রেনটি চলতে শুরু করে নি- অন্যটা শুরু করেছে।" অসাধারণ যুক্তি এবং এই যুক্তি ফেলে দেয়ার কোনো উপায় নেই। সত্যি কথা বলতে কি এই যুক্তি কেউ ফেলে দেবে না (আইনস্টাইনও ফেলে দেন নি!) এবং এই যুক্তি ব্যবহার করার জন্যে জানালা দিয়ে বাইরে তাকানোরও প্রয়োজন নেই।

কাজেই আমি গোড়াতে যে প্রশ্নটা করেছিলাম সেটা আবার একটু নূতনভাবে করি: "মনে করা যাক তুমি একটা ট্রেনে ঘুমিয়ে আছ এবং যখন ঘুম ভেঙেছে তখন জানলা দিয়ে বাইরে তাকিয়ে দেখছ অন্য ট্রেনটা পিছন দিকে যাচ্ছে, তুমি কি বলতে পারবে, আসলে তোমার ট্রেনটা সামনের দিকে যাচ্ছে, নাকি অন্য ট্রেনটা পিছন দিকে যাচ্ছে?" এই প্রশ্নের উত্তর হচ্ছে, ট্রেনটা যদি সমবেগে যায়, গতির কোনো পরিবর্তন না হয় তা হলে কোনোভাবেই বলতে পারবে না! তোমার ট্রেনটাকে স্থির ধরে, অন্য ট্রেনটি পিছন দিকে যাচ্ছে বলা যে কথা, অন্য ট্রেনটিকে

স্থির ধরে তোমার ট্রেনটি সামনে যাচ্ছে বলা একই কথা - এই দুইয়ের মাঝে কোনো পার্থক্য নেই। সত্যি কথা বলতে কী যদি তুলনা করার জন্যে আশেপাশে কিছু না থাকে অর্থাৎ বিশ্বব্রহ্মাণ্ডে যদি এই দুটো ট্রেন ছাড়া আর কিছুই না থাকে তাহলে, আসলে কোনটি চলছে আর কোনটি দাঁড়িয়ে আছে সেটা বের করার কোনো উপায় নেই!

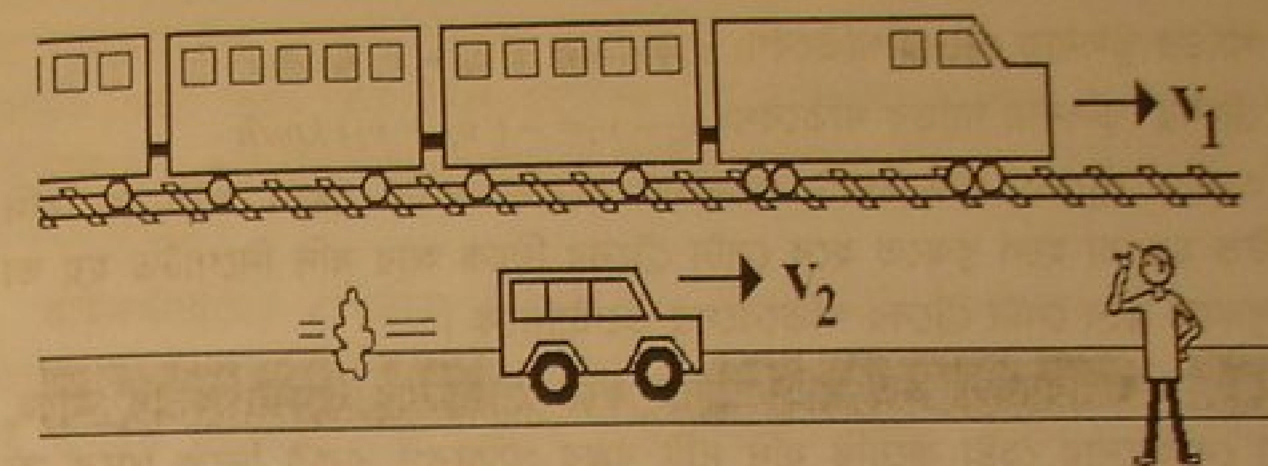
এখন তুমি যদি তোমার ট্রেনে বসে পদার্থ বিজ্ঞানের কোনো পরীক্ষা কর আর তোমার বন্ধুও যদি অন্য ট্রেনে বসে সেই পরীক্ষা করে তা হলে দুজনের পরীক্ষার ফলাফল, মাপ, পরিমাপ, তথ্য উপাত্ত ভিন্ন হতে পারে কিন্তু দেখবে পদার্থবিজ্ঞানের সূত্রগুলো এক। আইনস্টাইনের স্পেশাল থিওরি অফ রিলেটিভিটির সূত্র দুটি বলার সময় যখন বলা হয়েছিল *সব জায়গায়* তখন আসলে বোঝানো হয়েছিল একটি অবস্থানের তুলনায় সমবেগে চলতে থাকা অন্য সব অবস্থানগুলোকে। পদার্থবিজ্ঞানের ভাষায় এর একটা গালভরা নাম আছে, সেটা হচ্ছে ইনারশিয়াল রেফারেন্স ফ্রেম (Intertial Reference Frame)। আমাদের উদাহরণে দুটি ট্রেন ছিল দুটি ইনারশিয়াল রেফারেন্স ফ্রেম। কাজেই যখন একটা অবস্থানের সাথে আরেকটা অবস্থানের পরিবর্তন হয় সমবেগে (কোনো ত্বরণ হয় না) তখন তাদের বলে ইনারশিয়াল রেফারেন্স ফ্রেমে। আইনস্টাইন যখন *স্পেশাল থিওরি অফ রিলেটিভিটি* বলেছেন তখন *স্পেশাল* কথাটা দিয়ে এটাই বুঝিয়েছেন। একটার তুলনায় অন্যটা সমবেগে, কোনো ত্বরণ নেই। যদি একটার তুলনায় অন্যটার ত্বরণ হয় তা হলে তার জন্যে যে থিওরি অফ রিলেটিভিটির দরকার সেটাও আইনস্টাইন বের করেছেন - তার নাম হচ্ছে জেনারেল থিওরি অফ রিলেটিভিটি। স্পেশাল থিওরি অফ রিলেটিভিটি বোঝার জন্যে স্কুল কলেজের গণিত জানলেই চলে, জেনারেল থিওরি অফ রিলেটিভিটির জন্যে সেটি সত্যি নয়, সেটা বোঝার জন্যেই অনেক উঁচু পর্যায়ের নূতন কিছু গণিত জানতে হয়। তাই আমরা এই বইয়ে স্পেশাল থিওরি অফ রিলেটিভিটির মাঝেই আমাদের আলোচনাটুকুকে বেঁধে রাখব।

আপেক্ষিক গতি

কাজেই আমরা স্পেশাল থিওরি অফ রিলেটিভিটির সূত্র দুটো এবারে আরেকটু খুটিয়ে দেখি। প্রথম সূত্রটা বলছে কোনো স্থির অবস্থান বা ল্যাবরেটরিতে পদার্থ বিজ্ঞানের যে সূত্র পাওয়া যাবে, একটা সমান বেগে চলতে থাকা ট্রেনে বা

মহাকাশযানেও সেই একই সূত্র পাওয়া যাবে। এই সূত্রটা নিয়ে কেউ বিশেষ আপত্তি করবে না। কিন্তু দ্বিতীয় সূত্রটি নিয়ে তোমাদের কেউ কেউ আপত্তি করতে পারে, সেখানে বলা হয়েছে আলোর বেগ একটা স্থির অবস্থানে বা স্থির ল্যাবরেটরিতে যা, একটা সমবেগের গতিশীল অবস্থান বা চলন্ত ট্রেনেও তা। আলোর বেগ এত দ্রুত যে আমাদের দৈনন্দিন জীবনে মনে হয় এটা বুঝি তাৎক্ষণিক একটা ব্যাপার, তাই সেটা কম না বেশি আমরা টের পাই না। কাজেই আলোর বেগের ব্যাপারটা আপাতত স্থগিত রেখে অন্যকিছুর বেগ একটু খুঁটিয়ে দেখি। স্থির অবস্থা থেকে একটা ছুটে যাওয়া জিনিস দেখলে আমরা যা দেখব, চলন্ত বা গতিশীল অবস্থান থেকেও কি আমরা সেটা দেখব? কখনোই না। সবচেয়ে সহজ উদাহরণ হচ্ছে চলন্ত ট্রেন, যদি দুটো ট্রেন পাশাপাশি একই বেগে চলতে থাকে তা হলে একটা ট্রেন থেকে মনে হবে অন্য ট্রেনটার গতিবেগ বুঝি শূন্য। রেল লাইনের কাছাকাছি যারা দাঁড়িয়ে আছে তারাই দেখবে দুটি ট্রেন হয়তো ঝড়ের বেগে ছুটে যাচ্ছে। সেকম তুমি যদি চলন্ত ট্রেনে বসে হাতে একটি বল ধরে রাখ তাহলে তোমার কাছে মনে হবে বলটা স্থির। কিন্তু রেললাইনের পাশে মাটিতে দাঁড়িয়ে থাকা একজন যদি শুধুমাত্র বলটার দিকে তাকিয়ে থাকে তা হলে সে তো বলটাকে স্থির দেখবে না, সে দেখবে বলটা ছুটে যাচ্ছে। ঠিকভাবে বললে বলতে হবে ট্রেনের যেটুকু গতি মনে হবে বলটার ঠিক সেই গতি। আমাদের দৈনন্দিন জীবনেও আমরা সেটা দেখেছি, খেলার মাঠে ছোটাছুটি করার সময় যখন দুজন একই দিকে দৌড়াতে দৌড়াতে একজনের সাথে আরেকজনের ধাক্কা লাগে তখন সেটা সাধারণতঃ এমন কিছু হয় না—তার কারণ একজনের তুলনায় আরেকজনের বেগ বা আপেক্ষিক বেগ হচ্ছে বেগের পার্থক্য যেটা খুব কম। কিন্তু যদি একজন আরেকজনের মুখোমুখি ছুটে এসে ধাক্কা লাগাও তা হলে দুজনেরই অবস্থা খারাপ হয়ে যায় কারণ তখন আপেক্ষিক গতি হবে দুজনের সম্মিলিত বেগ।

আমরা ইচ্ছে করলে এই আপেক্ষিক গতির জন্যে খুব সহজ একটা সূত্র বের করতে পারি। ধরা যাক আমরা স্থির অবস্থানে বা একটা রেলস্টেশনে দাঁড়িয়ে আছি এবং দেখছি ট্রেনলাইন ধরে একটা ট্রেন যাচ্ছে যার গতিবেগ v_1 হচ্ছে ঘন্টায় 50 কিলোমিটার। ধরা যাক ট্রেনলাইনের পাশে একটা রাস্তা, সেই রাস্তা দিয়ে একটা গাড়ি একই দিকে যাচ্ছে যার গতিবেগ v_2 ঘন্টায় 30 কিলোমিটার। তা হলে:



1 নং ছবিঃ রাস্তার পাশে দাঁড়ানো পথচারীর তুলনায় ট্রেনের আপেক্ষিক গতি v_2 গাড়ির আপেক্ষিক গতি v_2, ট্রেনের তুলনায় গাড়ির আপেক্ষিক গতি $(v_2 - v_1)$ গাড়ীর তুলনায় ট্রেনের আপেক্ষিক গতি $(v_1 - v_2)$

স্থির স্টেশনের তুলনায় ট্রেনের গতিবেগঃ $v_1 - 0 = 50 km/h$

গাড়ির তুলনায় ট্রেনের গতিবেগঃ $v_1 - v_2 = 50-30 = 20 km/h$

ট্রেনের তুলনায় ট্রেনের গতিবেগঃ $v_1 - v_1 = 0 km/h$

ঠিক সেভাবেঃ

স্থির স্টেশনের তুলনায় গাড়ির গতিবেগঃ $v_2 - 0 = 30 km/h$

গাড়ির তুলনায় গাড়ির গতিবেগঃ $v_2 - v_2 = 0 km/h$

ট্রেনের তুলনায় গাড়ির গতিবেগঃ $v_2 - v_1 = 30 - 50 = -20 km/h$

এখানে একটি নিগেটিভ চিহ্ন চলে এসেছে, যার অর্থ ট্রেনের গতি যেদিকে গাড়ির আপেক্ষিক গতি তার উল্টোদিকে! অর্থাৎ কেউ যদি ট্রেনে বসে গাড়ির দিকে তাকিয়ে থাকে (এবং আর অন্য কিছুর দিকে না তাকায়!) তা হলে দেখবে ট্রেনের সাপেক্ষে গাড়িটা উল্টোদিকে যাচ্ছে।

এবারে আমরা যদি ধরে নিই ট্রেন যেদিকে যাচ্ছে গাড়িটি যাচ্ছে তার উল্টোদিকে, অর্থাৎ

ট্রেনের গতিবেগঃ $v_1 km/h$

গাড়ির গতিবেগঃ $-v_2 km/h$

গাড়ীটা যেহেতু উল্টোদিকে যাচ্ছে তাই তার গতিবেগ আমরা একটা নিগেটিভ চিহ্ন বসিয়েছি।

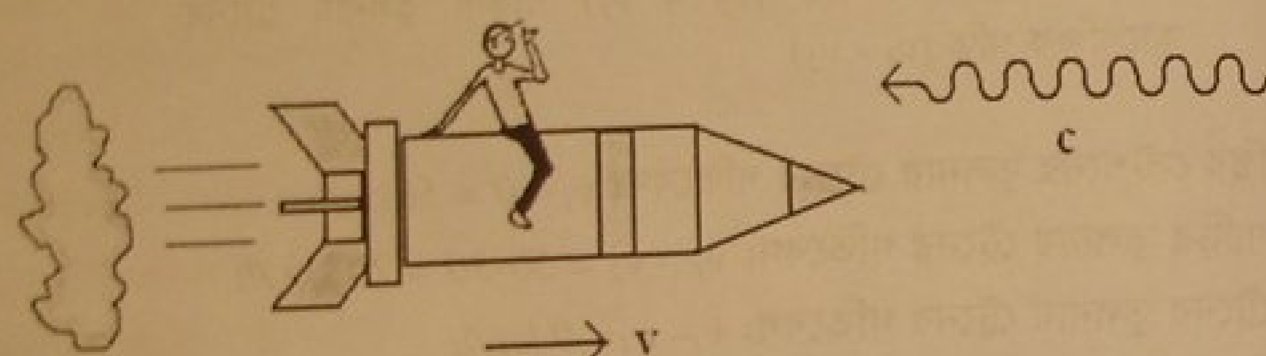
তা হলে আমরা দেখব:

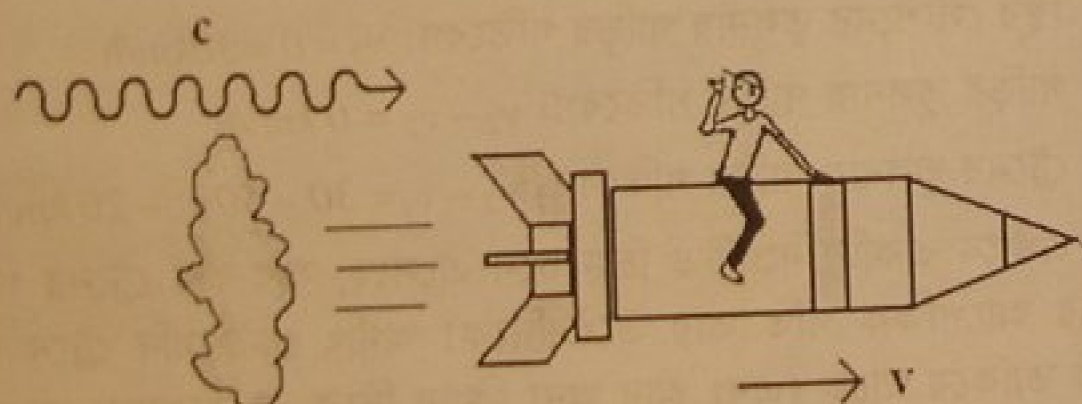
গাড়ির তুলনায় ট্রেনের গতিবেগ: $v_1 - (-v_2) = v_1 + v_2$ km/h

ট্রেনের তুলনায় গাড়ির গতিবেগ: $v_2 - v_1 = -(v_1 + v_2)$ km/h

আমরা ট্রেনের গতিবেগটি পজিটিভ ধরেছি অর্থাৎ কোন গতিবেগ যদি পজিটিভ হয় তা হলে বুঝতে হবে সেটা ট্রেনের দিকে আর যদি নিগেটিভ হয় তা হলে বুঝতে হবে সেটা ট্রেনের গতিবেগের উল্টোদিকে।

এই সহজ বিষয়টা এত খুটিনাটিসহ করে দেখানোর একটা কারণ আছে, আমরা বোঝানোর চেষ্টা করেছি যদি দুটি বস্তুর গতিবেগ একই দিকে থাকে তা হলে তাদের আপেক্ষিক গতির পরিমাণ হচ্ছে তাদের গতিবেগের পার্থক্য আর যদি বিপরীত দিকে থাকে তা হলে তাদের আপেক্ষিক গতি হচ্ছে তাদের গতিবেগের যোগফল।





2 নং ছবি: রকেটের যাত্রীর কাছে আলোর গতিবেগ কী উপরের বেলায় (c + v) এবং নিচের বেলায় (c – v) ?

গতির যোগফল

এবারে তা হলে 2 নম্বর ছবির ব্যাপারটি দেখা যাক, একজন মহাকাশচারী রকেটে করে যাচ্ছে, তার রকেটের বেগ v, ঠিক তখন তার দিকে বিপরীত দিক থেকে

আলোকরশ্মি ছুটে এসেছে যার গতি হচ্ছে c। এখন কি মহাকাশচারীর কাছে মনে হবে তার রকেটের তুলনায় আলোর আপেক্ষিক গতি হচ্ছে $(c + v)$? আবার যখন রকেটের পিছন থেকে তার দিকে আলোক রশ্মি ছুটে আসবে তখন তার গতিবেগ মনে হবে $(c - v)$? দুই ক্ষেত্রেই আমরা দেখছি আলোর গতি হয় বেড়ে যাচ্ছে, না হয় কমে যাচ্ছে।

আইনস্টাইনের স্পেশাল থিওরি অফ রিলেটিভিটি কিন্তু বলছে, আলোর গতিবেগ হচ্ছে c, সে যদি সামনে থেকে v বেগে ছুটে যাওয়া রকেটকে আঘাত করে তখনও মহাকাশচারীর তুলনায় তার গতিবেগ হচ্ছে c আবার যদি পিছন থেকে ছুটে আসে তখনও মহাকাশচারীর কাছে মনে হবে গতিবেগ (c – v) নয় গতিবেগ হচ্ছে c! ব্যাপারটা বিশ্বাসযোগ্য মনে না হলেও সত্যি। বিজ্ঞানীরা নানাভাবে পরীক্ষা করে দেখেছেন যে আসলেই যেভাবেই বা যেখানেই আলোর গতিবেগ মাপা হোক সব সময়েই আলোর বেগ থাকে সমান। কাজেই এটা নিয়ে তর্ক বিতর্ক না করে আইনস্টাইনের স্পেশাল থিওরি অফ রিলেটিভিটির দ্বিতীয় সূত্রটি বিশ্বাস করে নিয়ে আমরা কি একটু অগ্রসর হতে পারি?

রেলগাড়ি আর গাড়ির উদাহরণে আমরা দেখেছি যখন একটা গতিশীল বস্তুর দিকে আরেকটি গতিশীল বস্তু ছুটে আসে তখন একটার তুলনায় অন্যটার গতিবেগ হচ্ছে দুটো বেগের যোগফল। কিন্তু সেই নিয়মটা কিন্তু আলোর বেলায় খাটবে না– আইনস্টাইনকে বিশ্বাস করে জোর করে সেটা খাটিয়ে নিলে কেমন হয়? হতে পারে আমরা যখন একটা গতিশীল বস্তুর তুলনায় আরেকটা গতিশীল বস্তুর আপেক্ষিক গতি বের করেছিলাম তখন শুধু দুটো বেগ যোগ (কিংবা বিয়োগ) করার কথা না– তার সাথে সাথে অন্য কিছু দিয়ে ভাগও দেবার কথা! আমি জানি এভাবে কেউ সূত্র বের করে না–কিন্তু চেষ্টা করে দেখতে ক্ষতি কী? ধরা যাক আসল সূত্রটি (v + c) নয়, সেটাকে k দিয়ে ভাগ দিতে হয়। যেন

$$\frac{c+v}{k} = c$$

আইনস্টাইনের দ্বিতীয় সূত্রটি জোর করে সত্যি করে ফেলা হল! এখান থেকে k-এর মান বের করা সহজ,

$$k = \frac{v+c}{c} = 1 + \frac{v}{c}$$

কাজেই কোনো গতিশীল বস্তু যেটা v বেগে যাচ্ছে সেখানে সামনে আলো এসে পড়লে গতিশীল বস্তুটির তুলনায় আলোর বেগ হবে:

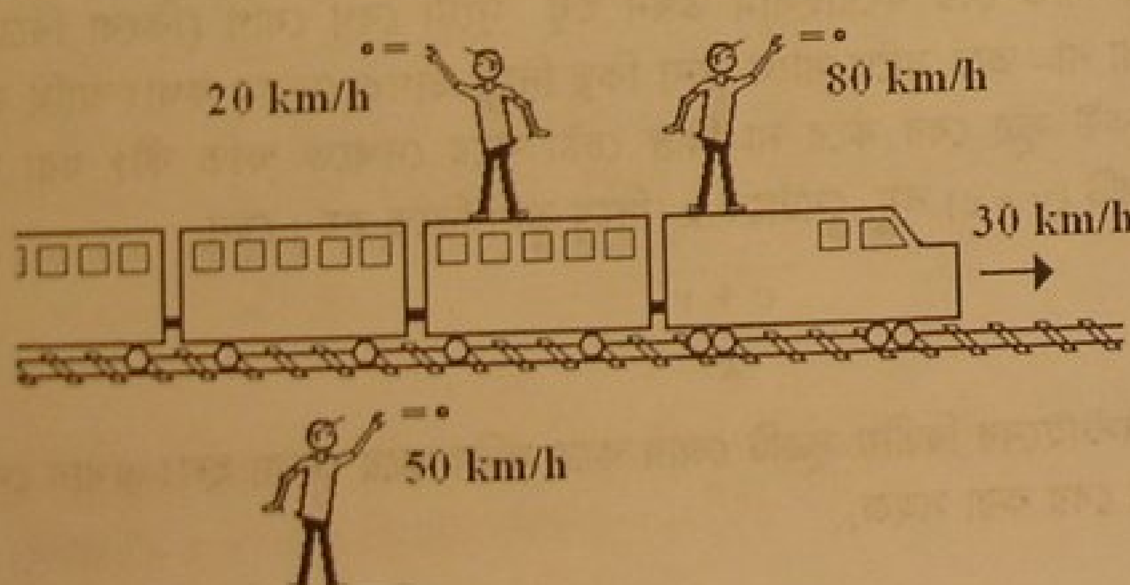
$$\text{আলোর আপেক্ষিক গতি} = \frac{c+v}{1+\frac{v}{c}}$$

যদি আলোটা পেছন থেকে আসে তাহলে v-এর জায়গায় লিখতে হবে $-v$ অর্থাৎ সূত্রটি হবে,

$$\text{আলোর আপেক্ষিক গতি} = \frac{c-v}{1-\frac{v}{c}}$$

আমি জানি সবাই এই ছেলেমানুষি কাজটি দেখে মুচকি হাসছে–কিন্তু মজার ব্যাপার হল, এটাই হচ্ছে সঠিক সূত্র! আমরা কোনোকিছু না করে পদার্থবিজ্ঞানের কত বড় একটা সূত্র বের করে ফেলেছি কেউ খেয়াল করেছে?

আমরা যে-সূত্রটা বের করেছি সেটা শুধু যে বাইরে থেকে আলো এসে পড়লেই সত্যি হয় তা নয়, কোনো একটা অবস্থান থেকে আলো বের হলে তার জন্যেও সত্যি। ধরা যাক আমরা 50 km/h বেগে ঢিল ছুড়তে পারি। আরও ধরা যাক একটা ট্রেন 30 km/h বেগে যাচ্ছে, আমরা যদি সেই ট্রেনের ছাদে দাঁড়িয়ে সামনের দিকে একটা ঢিল ছুড়ি তা হলে নিচে মাটিতে দাঁড়িয়ে থাকা একজনের কাছে মনে ঢিলটা যাচ্ছে (50 + 30) = 80 km/h বেগে। আবার যদি ঢিলটা উল্টোদিকে ছোড়া হয় তাহলে নিচে দাড়িয়ে থাকা একজনের মনে হবে ঢিলটা যাচ্ছে (50 – 30) = 20 km/h বেগে (3 নং ছবি)।



3 নং ছবিঃ 30 km/h বেগে ছুটে যাওয়া ট্রেনের ছাদ থেকে *50 km/h* বেগে ট্রেনের সামনের দিকে ঢিল ছুড়লে নিচে দাঁড়ানো একজনের মনে হবে ঢিলটা যাচ্ছে 80 km/h বেগে। আবার পিছন দিকে ছুড়ে দিলে নিচে দাঁড়ানো একজনের মনে হবে ঢিলটা ছোড়া হয়েছে *20 km/h* বেগে।

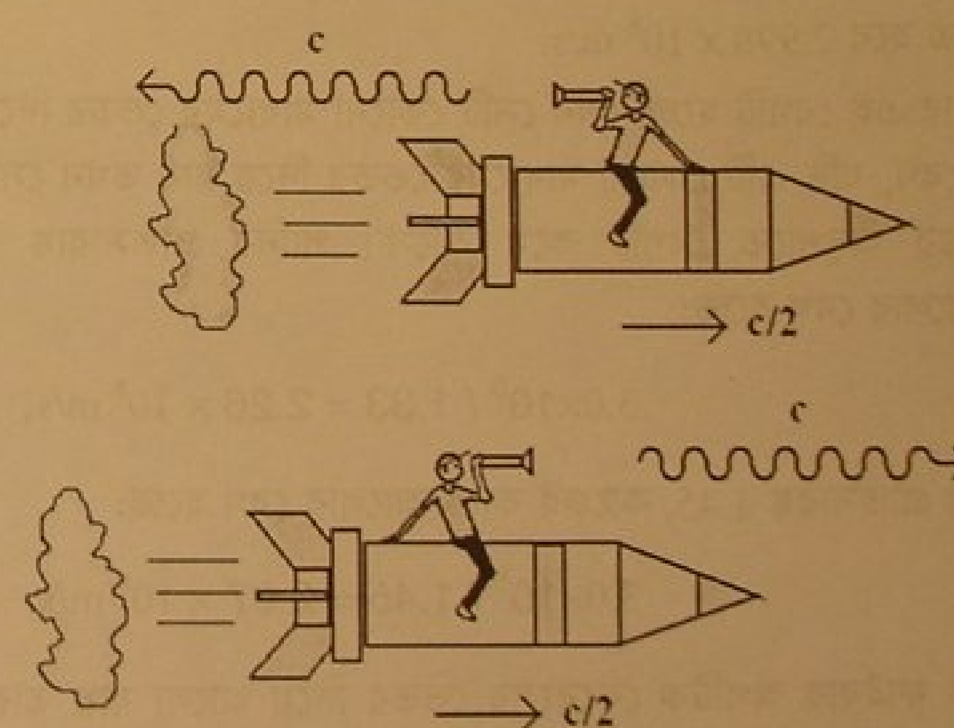
এই একই পরীক্ষাটা যদি আলোকরশ্মি দিয়ে করা হয় (4 নং ছবিঃ) তা হলে কিন্তু আমরা সম্পূর্ণ ভিন্ন একটা ব্যাপার দেখব। এমনিতে আলোর বেগ হচ্ছে c, একটা মহাকাশযান ছুটে যাচ্ছে c/2 বেগে, সেখান থেকে একটা ফ্ল্যাশলাইট দিয়ে আলো যদি মহাকাশযানের সামনের দিকে পাঠানো হয় তা হলে আমরা আমাদের সূত্র ব্যবহার করে পাইঃ

$$\frac{\frac{c}{2}+c}{1+\frac{\frac{c}{2}}{c}} = c$$

ঠিক একইভাবে আলো যদি পিছন দিকে পাঠানো হয় তাহলে আলোর বেগ হবেঃ

$$\frac{c-\frac{c}{2}}{1-\frac{\frac{c}{2}}{c}} = c$$

আমরা যতই চেষ্টা করি আলোর বেগকে আমরা বাড়াতেও পারব না, কমাতে পারব না। সেটি সবসময়েই হচ্ছে c !



4 নং ছবিঃ *c/2* বেগে ছুটে যাওয়া একটা রকেট থেকে আলো সামনে পিছনে যেদিকেই পাঠানো হোক, তার বেগ হচ্ছে *c*.

আলোর বেগ

বোঝাই যাচ্ছে আইনস্টাইনের স্পেশাল থিওরি অফ রিলেটিভিটির সাথে আলোর বেগের একটা খুবই ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক রয়েছে। রিলেটিভিটি সংক্রান্ত–আইনস্টাইনের দ্বিতীয় সূত্রটি আমরা যদি আরেকটু খুঁটিয়ে দেখি তা হলে দেখব সেটা আসলে বলছে আমরা যতই চেষ্টা করি না কেন কোনোভাবেই আলোকে তার গতিবেগ c থেকে দ্রুত পাঠাতে পারব না, যার অর্থ সৃষ্টিজগতে একটা *চরম বেগ* রয়েছে যার থেকে বেশি হওয়া সম্ভব না। সেই বেগটি পেতে পারে শুধুমাত্র আলো–যার কোনো ভর নেই। যে-বস্তুর ভর আছে আমরা যতই চেষ্টা করি না কেন কখনোই তার গতিবেগ আলোর বেগের সমান করতে পারব না।

আলোর এই বেগটি খুব সূক্ষ্মভাবে মাপা হয়েছে। কোনো মাধ্যমের ভেতর দিয়ে যদি না যেতে হয় তা হলে আলোর বেগ হচ্ছে:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

আমরা আমাদের দৈনন্দিন জীবনে এটাকে সহজ করে লিখি:

$$c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

দশমিকের পর একঘর পর্যন্ত শুদ্ধ লিখতে হলে লেখা উচিত 3.0×10^8 m/s, দুই ঘর শুদ্ধ লিখতে হলে লিখতে হবে 3.00×10^8 m/s, তিন ঘর পর্যন্ত লিখতে হলে লিখতে হবে 2.998×10^8 m/s.

আলোর এই বেগটি হচ্ছে যখন সেটি কোনো মাধ্যমের ভেতর দিয়ে যাচ্ছে না তখনকার বেগ, যদি এটি কোনো মাধ্যমের ভেতর দিয়ে যায় তখন সেই মাধ্যমের প্রতিসারাঙ্কের অনুপাতে বেগটি কমে আসে। পানির প্রতিসারাঙ্ক 1.33 তাই পানিতে আলোর বেগ হচ্ছে:

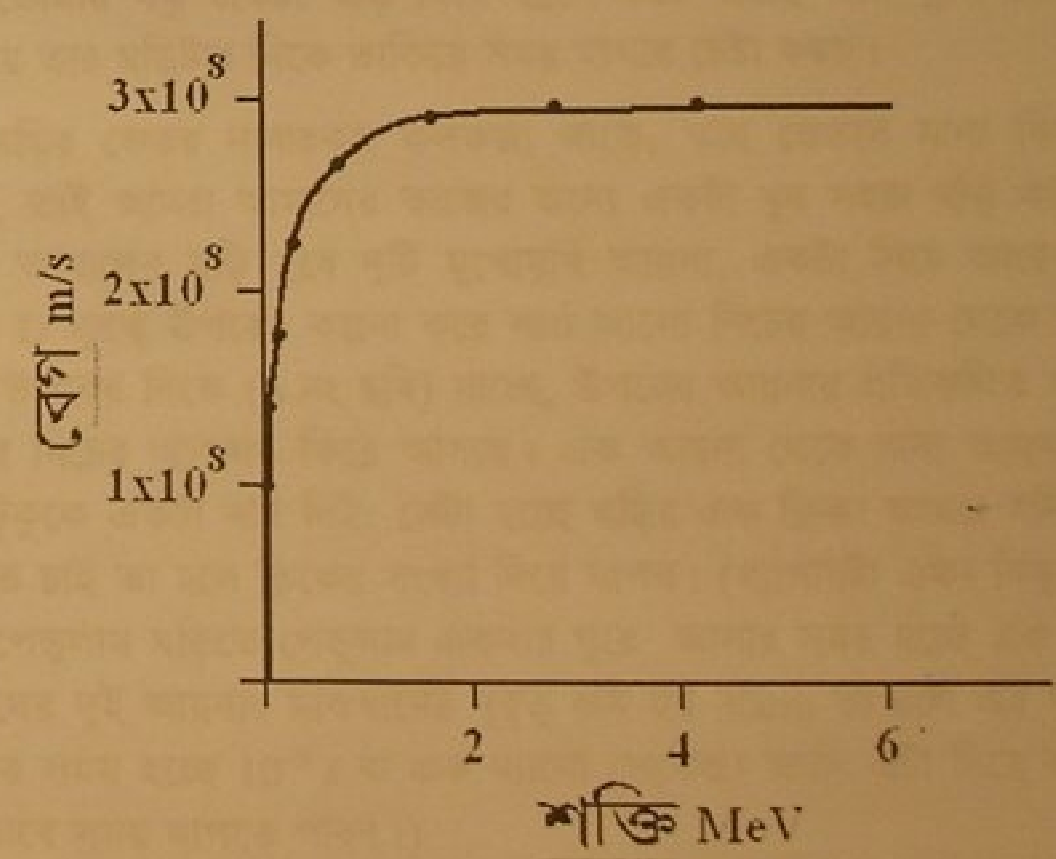
$$3.0\times10^8 / 1.33 = 2.26 \times 10^8 \text{ m/s},$$

কাচের প্রতিসারঙ্ক 1.45, কাজেই কাচে আলোর বেগ হচ্ছে:

$$3.0\times10^8 / 1.45 = 2.07 \times 10^8 \text{ m/s},$$

অর্থাত ফাইবার অপটিক কেবেলের ভেতর দিয়ে আলো যায় তার সত্যিকার বেগের দুই-তৃতীয়াংশ বেগে! কোনো মাধ্যমের ভেতর দিয়ে যখন আলো যায় তখন সেটি সম্পূর্ণ ভিন্ন একটি ব্যাপার- থিওরি অফ রিলেটিভিটি সাথে তার কোনো সম্পর্ক নেই।

আইনস্টাইনের থিওরি অফ রিলেটিভিটি অনুযায়ী আলোর বেগ হচ্ছে সর্বোচ্চ বেগ, আলো এই বেগে যায় এবং কোনোভাবেই এর বেগ বাড়ানো তো সম্ভব নয়ই, কমানোও সম্ভব নয়। 1968 সালে সুইজারল্যান্ডের CERN ল্যাবরেটিতে নিউট্রাল পায়োন নামে একধরনের কণা তৈরি করা হয়েছিল যার গতিবেগ ছিল 0.99915c এই নিউট্রাল পায়োনার বৈশিষ্ট্য হচ্ছে এখান থেকে দুটি আলোর কণা বের হয়ে আসে। এগুলো খুব শক্তিশালী আলোর কণা–এদেরকে বলে গামা রে। এই পায়োন থেকে গামা রে বের হয় আলোর গতিতে, পায়োনটা নিজেই যাচ্ছে আলোর কাছাকাছি গতিতে, তার পরেও দেখা গেছে গামা রে -এর গতি কিন্তু c, তার থেকে একটুও বেশি নয় ঠিক যেভাবে আইনস্টাইন বলেছিলেন। এরকম অসংখ্য পরীক্ষা করে দেখা গেছে আলোর গতি হচ্ছে সৃষ্টিজগতের সর্বোচ্চ গতি এবং এর চাইতে বেশি গতি সম্ভব নয়। এই গতি পেতে পারে শুধুমাত্র সেইসব কণা যার কোনো ভর নেই। যদি কারো ভর থাকে তা হলে যতই চেষ্টা করা যাক তার বেগ কোনোভাবেই আলোর বেগে নেয়া সম্ভব না। 5 নং ছবিতে শক্তি প্রয়োগের সাথে সাথে কীভাবে ইলেকট্রনের বেগ বেড়ে যেতে থাকে সেটা দেখানো হয়েছে।



5 নং ছবি: শক্তি যতই বাড়ানো হোক ইলেকট্রনের গতি কিছুতেই আলোর গতি (3×10^8 m/s) এর সমান করা যায় না কিংবা আলোর গতি থেকে বাড়ানো যায় না।

প্রচণ্ড শক্তি প্রয়োগ করে ইলেকট্রনের গতিবেগ 0.999 999 999 95 c পর্যন্ত করা সম্ভব হয়েছে। সেটা আলোর বেগের খুবই কাছাকাছি কিন্তু তবুও আলোর বেগ নয়, আলোর বেগ থেকে কম। আমরা যত শক্তিই প্রয়োগ করি না কেন সেটা আলোর বেগের কাছাকাছি পৌঁছাতে পারবে কিন্তু কখনোই আলোর বেগের সমান হতে পারবে না।

এর মাঝে কোনো রহস্য নেই, আমরা যখন থিওরি অফ রিলেটিভিটি আরেকটু খুঁটিয়ে দেখব তখনই বুঝে যাব কীভাবে এটা হচ্ছে, কেন এটা হচ্ছে!

আপেক্ষিক সময়

সময়ের প্রসারণ

আইনস্টাইনের দুটি সূত্র যদি আমরা সত্যি সত্যি বিশ্বাস করে থাকি তা হলে সেগুলো ব্যবহার করে আমরা এখন চোখের পলকে বিজ্ঞানের সবচেয়ে রহস্যময় ব্যাপারটি বের করে ফেলব। সেটা বের করার জন্যে শুধু আমাদের কল্পনা করতে হবে তোমার বন্ধু একটা ঘড়ি নিয়ে ট্রেনে করে যাচ্ছে আর তুমি রেলস্টেশনে দাঁড়িয়ে তার ঘড়িটার দিকে তাকিয়ে সময় মাপার চেষ্টা করছ।

ঘড়ির ভেতর নানারকম কলকজা থাকে, তার ভেতরে নানা কিছু ঘটতে থাকে, তাই আমরা আমাদের কাজের জন্যে একটা খুব সহজ ঘড়ি কল্পনা করে নিই। আমাদের ঘড়ি হবে দুটি মুখোমুখি আয়না, একটা নিচে আরেকটা তার থেকে D দূরত্ব উপরে। কল্পনা করে নাও আলো নিচের আয়না থেকে শুরু করে খাড়া উপরের দিকে (6 নং ছবি) যাচ্ছে, উপরের আয়নায় প্রতিফলিত হয়ে সেটা আবার নিচের আয়নায় ফিরে আসছে। এক আয়না থেকে অন্য আয়নায় যাবার সময়টুকুকে একটা নাম দিই: সেটা হচ্ছে ঘড়ির এক ক্লিক! আমরা যদি সময়কে মাপতে চাই তা হলে ক্লিকের সংখ্যা দিয়ে মাপব। (ব্যাপারটা এমন কিছু আজগুবি নয়, পেন্ডুলাম ঘড়িতে পেন্ডুলাম একবার ঘুরে আসার সময় হচ্ছে এক সেকেন্ড। আমাদের দুই আয়নার মাঝখানের দূরত্ব যদি হয় 30cm তা হলে এই ঘড়ির এক ক্লিকের সময় হচ্ছে 10^{-9} s বা এক ন্যানো সেকেন্ড! অর্থাৎ এটা দিয়ে আমরা খুব সূক্ষ্মভাবে সময় মাপতে পারব।)

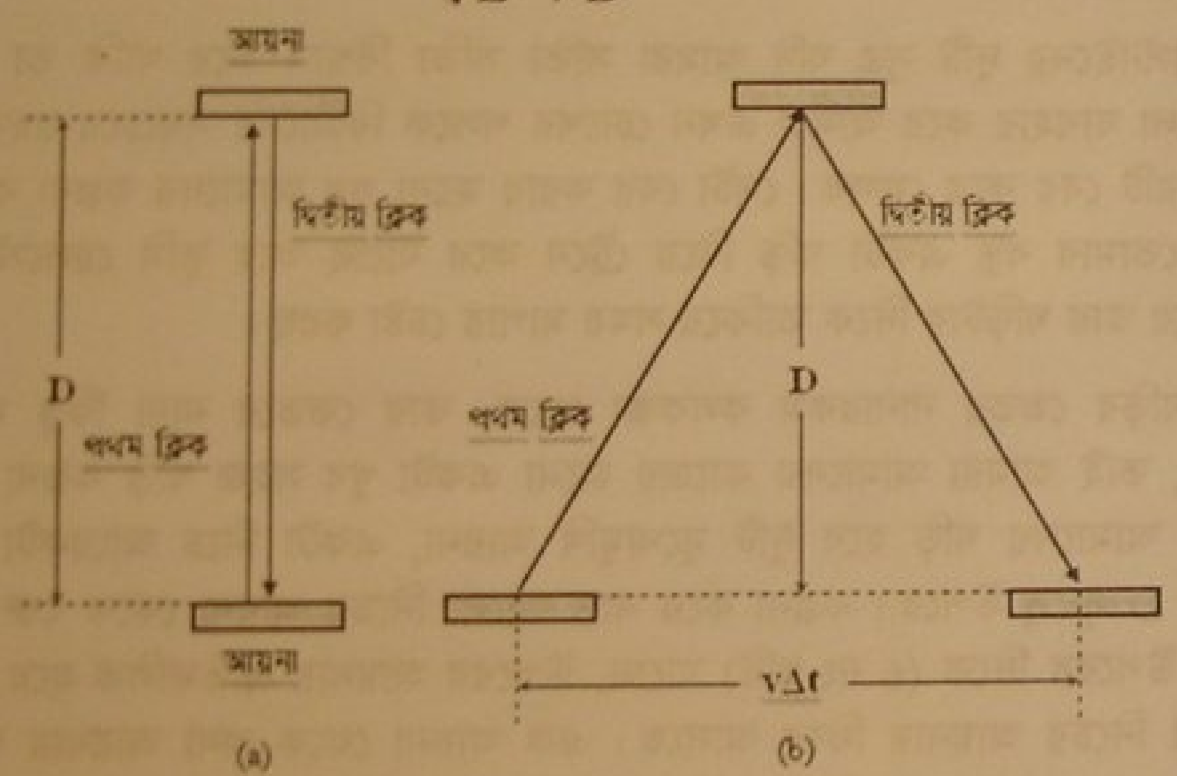
এবারে আমরা আমাদের কাজ শুরু করি, কল্পনা করে নিই আমাদের ট্রেনটা চলছে v বেগে এবং এই ট্রেনের ভেতরে তোমার বন্ধু বসে তার ঘড়ির প্রতি

ক্লিকের সময় মাপার চেষ্টা করছে। এই সময়টাকে যদি আমরা t_0 বলি তা হলে 6 নং ছবি থেকে বলা যায়

$$t_0 = \frac{D}{c}$$

এবার তুমি স্টেশনে দাঁড়িয়ে থেকে তোমার বন্ধুর ঘড়ির ক্লিকটা মাপার চেষ্টা করো। যেহেতু ট্রেনটা v বেগে যাচ্ছে কাজেই তোমার মনে হবে তোমার বন্ধু এবং নিচের এবং উপরের দুটি আয়না, সবকিছুই v^2 বেগে যাচ্ছে। তুমি দেখবে নিচের আয়না থেকে আলোটা রওনা দিয়ে যখন উপরের আয়নাকে আঘাত করেছে তখন সেটা ট্রেনের গতিবেগের কারণে L দূরত্ব সরে গেছে। কাজেই তুমি দেখবে নিচের আয়না থেকে উপরের আয়নায় যেতে আলোকে খানিকটা বাড়তি দূরত্ব অতিক্রম করতে হচ্ছে। পিথাগোরাসের সূত্র ব্যবহার করে তুমি সেই দূরত্বটুকু বের করে ফেলতে পারবে, সেটা হচ্ছেঃ

$$\sqrt{L^2 + D^2}$$



6 নং ছবিঃ (a) ট্রেনে বসে থাকা একজন দেখছে আলোক রশ্মি নিচের আয়না থেকে উপরের আয়নায় গিয়ে প্রতিফলিত হয়ে আবার নিচের আয়নায় ফিরে আসছে। সময় লেগেছে $2\frac{D}{c}$

(b) স্টেশনে দাঁড়িয়ে থাকা একজন দেখবে নিচের আয়না থেকে যে আলোকরশ্মিটি বের হয়েছে সেটি যখন উপরের আয়নায় পৌঁছে তখন সেটি আগের জায়গায় নেই, ডানদিকে সরে গেছে। আলোটি প্রতিফলিত হয়ে যখন নিচের আয়নায় পৌঁছে তখন সেটিও আরো ডানদিকে সরে গেছে।

এই দূরত্বটি অতিক্রম করতে আলোর কতটুকু সময় লেগেছে? এবারে আমরা আইনস্টাইনের দ্বিতীয় সূত্রটি স্মরণ করি, আলোর বেগ সব জায়গায়তেই c, কাজেই তোমার বন্ধুর কাছেও সেটা ছিল c, তোমার কাছেও সেটা হচ্ছে c যার মানে ট্রেনে রাখা ঘড়ির এক ক্লিকের সময়টুকু তোমার কাছে মনে হবে,

$$t = \frac{L^2 + D^2}{c}$$

অবশ্যই আমরা জানি এখানে L হচ্ছে t সময়ে ট্রেন যেটুকু দূরত্ব অতিক্রম করেছে সেটুকু অর্থাত

$$L = vt$$

কাজেই আমরা স্টেশনে দাড়িয়ে থেকে চলন্ত ট্রেনের ঘড়ির এক ক্লিকের সময়টাকে লিখতে পারি

$$t = \frac{\sqrt{v^2t^2 + D^2}}{c}$$

এটাকে একটু অন্যভাবে লেখা যায়

$$c^2t^2 = v^2t^2 + D^2$$

কিংবা $$c^2 - v^2 = D^2$$

যেখানে থেকে এক ক্লিকের সময় বের করা যায়

$$t = \frac{D}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

ডান পাশে উপরে নিচে c দিয়ে ভাগ দিলে আমরা পাই,

$$t = \frac{\frac{D}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

এখন তোমরা একটা ধাক্কা খাবার জন্যে প্রস্তুত হও। তোমরা সবাই জান তোমার বন্ধু ট্রেনে বসে তার ঘড়ির প্রতি ক্লিকের সময় বের করেছিল, সেটা ছিল

$$t_0 = \frac{D}{c}$$

কাজেই আমরা লিখতে পারি,

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

এই নিরীহ সমীকরণটির দিকে কিছুক্ষণ তাকিয়ে থাকো কারণ এটি হচ্ছে বিজ্ঞানের সবচেয়ে রহস্যময় সীমকরণগুলির একটি! এই সমীকরণটি বিজ্ঞানের সবকিছু ওলট-পালট করে দিয়েছিল। তোমরা নিশ্চয়ই মনে রেখেছ t_0 হচ্ছে ঘড়ির এক ক্লিক যেটা হচ্ছে তোমার বন্ধু ট্রেনে বসে মেপেছিল। t সময়টুকুও কিন্তু একই ঘড়ির ক্লিক, তবে সেটা মেপেছ তুমি, স্টেশনে দাঁড়িয়ে। সমীকরণটির দিকে তাকিয়ে দেখো t আর t_0 সমান নয়। $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ -এর মান সবসময়েই 1 থেকে কম কাজেই t এর মান সবসময়েই t_0 থেকে বড়। যার অর্থ সময় শাশ্বত নয়। যে, ঘড়ির প্রতি ক্লিক তোমার বন্ধুর কাছে t_0, তোমার কাছে সেটা t এবং t-এর মান t_0 থেকে বেশি। সেটা কত বেশি তা নির্ভর করবে vএর মানের উপর। t এর মান যদি কম হয় তাহলে পার্থক্যটুকু ধর্তব্যের মাঝে নয় কিন্তু vএর মান যদি c এর কাছাকাছি চলে যায় তা হলে বিস্ময়কর ব্যাপার ঘটতে পারে। ধরা যাক তোমার বন্ধু যে-ট্রেনে বসেছিল তার গতিবে $v = 0.99c$ (অর্থাৎ আলোর বেগের খুব কাছাকাছি) তা হলে আমরা লিখতে পারি:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.99\,c}{c}\right)^2}} = \frac{t_0}{\sqrt{0.0199}} = 7t_0$$

যার অর্থ তোমায় বন্ধু যদি সেই ট্রেনে দশ বছর কাটিয়ে দিয়ে ফিরে আসে তাহলে তার বয়স বাড়বে দশ বৎসর কিন্তু তোমায় জীবনের সময় অতিক্রান্ত হয়ে যাবে 70 বছর (সম্ভাবনা আছে তোম.র বন্ধু ফিরে এসে দেখবে তুমি যদি তখনো বেঁচে আছ তাহলে থুর থুরে বুড়ো হয়ে গেছো এমনকি তোমার ছেলেমেয়েরাও বুড়ো হয়ে গেছে!)

এই চমকপ্রদ সমীকরণটি আমাদেরকে বলে যে স্থির আছে তার তুলনায় চলমান অন্য সবার সময়ের গতি কমে আসে। যে স্থির তার ঘড়িটি চলবে দ্রুত আর যে চলমান, তার ঘড়িটি চলবে ধীরে! আমি জানি এটা বিশ্বাস করতে কষ্ট হচ্ছে, কিন্তু এটাকে বিশ্বাস করতে হবে, এটা সত্যি। অসংখ্য পরীক্ষা করে এটার সত্যতা প্রমাণ করা হয়েছে।

মিউওনের আয়ু

মহাকাশে থেকে শক্তিশালী কসমিক রে যখন বায়ুমণ্ডলের উপরে আঘাত করে তখন সেখানে মিউওন নামে এক ধরনের কণা তৈরি হয়। এই কণাগুলোর আয়ু মাত্র 2.2 মাইক্রোসেকেন্ড। বায়ুমণ্ডলের উপরে তৈরি হওয়া মিউওন যদি আলোর বেগের কাছাকাছি গতিবেগেও পৃথিবীর দিকে আসতে শুরু করে তা হলে সে তার আয়ু থাকাকালীন সময়ে আসতে পারবে মাত্র: $c \times 2.2 \times 10^{-6}$ m = (3×10^8) (2.2 $\times 10^{-6}$) m = 660m যার অর্থ এক কিলোমিটার থেকেও কম দূরত্ব যাবার আগেই মিউওনগুলো অন্য কিছুতে পরিবর্তিত হয়ে যাবে। যার অর্থ পৃথিবীতে বসে আমরা কখনোই মিউওন দেখতে পাব না। কিন্তু রহস্যের ব্যাপার হলো আমরা কিন্তু পৃথিবীতে বসে সবসময়েই মিউওন দেখতে পাই, সত্যি কথা বলতে কি যারা পৃথিবীতে বসে খুব সূক্ষ্ম এক্সপেরিমেন্ট করতে চায় তারা এই মিউওনের যন্ত্রণায় অতিষ্ঠ হয়ে যায়। প্রচণ্ড শক্তিশালী এই মিউওন ঘরবাড়ি দালান-কোঠা কংক্রিট সব কিছু ভেদ করে চলে আসে।

আইনস্টাইনের স্পেশাল থিওরি অফ রিলেটিভিটির আগে মিউওনের আয়ু নিয়ে এই রহস্যের কোনো সমাধান ছিল না, কিন্তু এখন আমরা চোখের পলকে এই রহস্যের সমাধান করতে পারি। মিউওনের আয়ু কখনোও বেড়ে যায় নি–তার আয়ু আসলেই মাত্র 2.2 মাইক্রোসেকেন্ড। সেটা যখন বায়ুমণ্ডলের ওপরে তৈরি হয় তারপর সে আসলেই মাত্র 2.2 মাইক্রোসেকেন্ড বেঁচে থাকে। শক্তিশালী কসমিক রে এর আঘাতে তৈরি হয় বলে এই মিউওনগুলোও হয় প্রচণ্ড শক্তিশালী, তাদের গতিবেগ হচ্ছে প্রায় 0.9994 c, কাজেই আমরা যারা পৃথিবীর মানুষ তারা মিউওনের 2.2 মাইক্রোসেকেন্ডকে দেখব:

$$\frac{2.2}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.9994\,c}{c^2}\right)^2}} = 63.51 \text{ মাইক্রোসেকেন্ড}$$

অর্থাৎ মিউওন তার হিসেবে সত্যিই মাত্র 2.2 মাইক্রোসেকেন্ড বেঁচেছিল কিন্তু আমাদের হিসেবে সেটা বেঁচে থাকে 63.51 মাইক্রোসেকেন্ড, প্রায় ত্রিশগুণ বেশি সময়! এই ত্রিশগুণ বেশি সময়ে সেটা ত্রিশগুণ বেশি দূরত্ব যেতে পারে–কাজেই বায়ুমণ্ডলের উপরের পৃষ্ঠ থেকে পৃথিবীর পৃষ্ঠে পৌঁছে যাওয়া মিউওনেরর জন্যে কোনো ব্যাপারই না!

আসল ঘড়ির আসল সময়

যারা এখনও ব্যাপারটি নিয়ে অস্বস্তি বোধ করছে তাদের জন্যে বলা যায় যে সময়ের এই ব্যাপারটা সত্যিকারের ঘড়ি দিয়েও মেপে পরীক্ষা করা হয়েছে। অ্যাটমিক ক্লক নামে অত্যন্ত সূক্ষ্ম এক ধরনের ঘড়ি আছে সেই ধরনের একটা ঘড়ি নিয়ে কয়েকজন বিজ্ঞানী 1977 সালে একটা প্লেনে উঠে বিশ্ব পরিভ্রমণে বের হলেন। পৃথিবীটা কয়েক পাক ঘুরে নিচে নেমে এসে দেখলেন সত্যি সত্যি তাদের ঘড়িতে অতিক্রান্ত সময় পৃথিবীর অতিক্রান্ত সময় থেকে কম! এই পরীক্ষাটি তারা করতে পেরেছিলেন কারণ তাঁদের ঘড়িটা ছিল অ্যাটমিক ক্লক–আমাদের সাধারণ ঘড়িতে সেটা ধরা পড়বে না। সময়ের এই পার্থক্যটুকু ধরার জন্যে কত বেগে যেতে হয় তার একটা ধারণা দেবার জন্যে বিভিন্ন বেগে যাওয়ার কারণে সময়ের কতটুকু পার্থক্য হয় তার একটা তালিকা 1 নম্বর তালিকায় দেয়া হয়েছে। তোমাদের মনে করিয়ে দেয়ার জন্যে বলা যায় বর্তমান পৃথিবীতে মহাকাশে পাঠানোর জন্যে একটা রকেটাকে সেকেন্ডে 10-15 km/s বেগে যেতে হয়।

1 নম্বর তালিকা

গতিবেগ	অতিক্রান্ত সময়
$10\,km/h$ (হাঁটা)	2×10^{-14} %
$100\,km/h$ (গাড়ি)	2×10^{-12} %
$1000\,km/h$ (প্লেন)	2×10^{-10} %
$15\,km/s$ (রকেট)	2×10^{-7} %
$0.1c$	2.0 %
$0.99c$	7.0 গুণ
$0.999c$	22.0 গুণ
$0.999999\,c$	700 গুণ

দৈর্ঘ্য সংকোচন

সময় বনাম দৈর্ঘ্য

সময়ের সম্প্রসারণের ব্যাপারটা যদি আমরা সত্যিই বিশ্বাস করে থাকি তা হলে আমরা এরকম আরো বিচিত্র বিষয়ে যেতে পারি। আমরা আবার আমাদের মিউওনের বিষয়টিতে ফিরে যাই। আমরা দেখেছি বায়ুমণ্ডলের উপরে তৈরি হওয়া মিউনের আয়ু মাত্র 2.2 মাইক্রোসেকেন্ড এবং সেই মিউওন যদি একেবারে আলোর কাছাকাছি গতিবেগেও যায় তা হলে সেই সময়ে মিউওনের যাবার কথা মাত্র 660m. কিন্তু আমরা জানি সেটা পৃথিবীর পৃষ্ঠ পর্যন্ত চলে আসে তার কারণ আমাদের কাছে মনে হয় মিউওনের সময় সম্প্রসারণ করে সেটা হয়ে গেছে প্রায় 63.51 মাইক্রোসেকেন্ড এবং আলোর কাছাকাছি বেগে সেটা যেতে পারে প্রায় 19km, পৃথিবীপৃষ্ঠে আসার জন্যে যথেষ্ট দূরত্ব।

এবারে আমরা দেখি মিউওনের কাছে কী মনে হয়। মিউওনের নিজের কাছে কিন্তু মনে হচ্ছে যে সে 2.2 মাইক্রোসেকেন্ডই বেঁচেছিল। কাজেই এই 2.2 মাইক্রোকেন্ডে মিউওনটি যদি 19.km দূরত্ব অতিক্রম করে থাকে তা হলে তার বেগ হচ্ছে:

$$v = \frac{19km}{2.2\mu s} = 9\times10^{9}\,ms = 30c$$

যেটা আলোর বেগের ত্রিশগুণ–কিন্তু আমরা সবাই জানি আলো থেকে বেশি গতিতে কিছু যেতে পারে না! কাজেই এই সমস্যাটা আমাদের মেটাতে হবে!

আমরা যদি সময়ের শ্বাশ্বত রূপ ফেলে দিয়ে বলতে পারি একেক জায়গার সময় একেক রকম–কোনোটা দ্রুত কোনোটা ধীর তা হলে দূরত্বের শ্বাশ্বত রূপ রেখে দিতে হবে কে বলেছে? কাজেই আমরা অনুমান করছি গতিশীল বস্তুর সময়কে যে রকম $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ দিয়ে ভাগ দিয়ে সম্প্রসারণ করেছি ঠিক সেরকম গতিশীল বস্তুর দৈর্ঘ্যকেও $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ দিয়ে গুণ করে সেটাকে সংকোচন করতে হবে তা হলেই কোনো সমস্যা থাকবে না! কোনো একজন যদি নিজেকে স্থির ধরে নেয় তা হলে তার চারপাশে যা কিছু নড়ছে চড়ছে বা গতিশীল হচ্ছে সবকিছুতে সময় সম্প্রসারণ হতে থাকে সেই কথাটা যেরকম সত্যি, সেরকম এটাও সত্যি: কোনো একজন যদি নিজেকে স্থির ধরে নেয় তা হলে তার চারপাশে যা কিছু নড়ছে চড়ছে গতিশীল হচ্ছে সবকিছুর দূরত্বের সংকোচন হতে থাকে। সময়ের সম্প্রসারণ হয় $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ দিয়ে, যার মান সবসময়েই 1 থেকে বেশি। দূরত্বের সংকোচন হয় $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ দিয়ে, যার মান সবসময়েই 1 থেকে কম, তাই দূরত্ব এই হারে সংকুচিত হয়ে যায়।

তা হলে আমরা আবার মিউওনের কাছে ফিরে যাই, মিউওন যখন আলোর বেগের কাছাকাছি বেগে পৃথিবীর দিকে ছুটে আসে তখন তাকেই যদি আমরা স্থির ধরি, তা হলে সেই মিউওনের মনে হবে, সে ঠিকই স্থির, কিন্তু পৃথিবীটাই বুঝি প্রায় আলোর বেগে তার কাছে ছুটে আসছে। কাজেই বায়ুমণ্ডল থেকে পৃথিবীর দূরত্বটা সংকুচিত হয়ে যাবে $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ হিসেবে, মিউওনের কাছে মনে হবে এই ছোট দূরত্বটা 2.2 মাইক্রোসেকেন্ডের ভেতর পৌঁছে যেতে কোনো সমস্যাই নেই।

সংকুচিত দৈর্ঘ্য

দূরত্ব সংকোচনের বিষয়টা আমরা একটা উদাহরণ থেকে বের করেছি। এবারে খাঁটি যুক্তি তর্ক এবং খানিকটা গণিত দিয়ে বের করি। আবার ফিরে যাই তোমার কাছে এবং ট্রেনে বসে থাকা তোমার বন্ধুর কাছে।

ধরা যাক তোমরা দুজনেই ঠিক করলে তোমরা স্টেশনের প্ল্যাটফর্মের দৈর্ঘ্যটা মাপবে। তুমি একটা দৈর্ঘ্য মাপার ফিতে দিয়ে দৈর্ঘ্যটা মেপে দেখলে সেটা হচ্ছে

L_0, যখন দূরত্বটা মাপা শেষ হয়েছে তখন দেখলে তোমরা বন্ধু যে-ট্রেনে বসে আছে সেই ট্রেনটি v বেগে এগিয়ে আসছে। ট্রেনটা স্টেশনে থামল না, তাই ট্রেনের ইঞ্জিন প্লাটফর্মের এক মাথা থেকে অন্য মাথায় যেতে যেটুকু সময় নিয়েছে সেটা মেপে নিলে, ধরা যাক সময়টা হচ্ছে t, কাজেই তুমি খুব আত্মবিশ্বাসের সাথে বলতে পারবে:

$$L_0 = vt$$

এখন তোমার বন্ধুর কাছে যাওয়া যাক। সেও ট্রেনে বসে প্লাটফর্মের দূরত্বটা মাপার চেষ্টা করছে, সে জানালা দিয়ে মাথা বের করলে তার কাছে মনে হবে সে বুঝি ট্রেনের ভেতর স্থির হয়ে বসে আছে, স্টেশনটাই v বেগে পিছন দিকে ছুটে যাচ্ছে। তোমার বন্ধু নিরুৎসাহিত হল না, সে দেখল কখন প্ল্যাটফর্মের এক মাথা তার সামনে এসেছে তখন থেকে সময়টুকু মাপতে শুরু করেছে। যখন প্ল্যাটফর্মের অন্য মাথা তার সামনে এসেছে তখন সে সময় মাপা শেষ করল এবং দেখল সময়টুকু হচ্ছে t_0 কাজেই সে বলল, প্ল্যাটফর্মের দুরত্ব

$$L = vt_0$$

এখানে একটা জিনিস লক্ষ করো, তুমি যখন দৈর্ঘ্য মাপার ফিতা দিয়ে প্ল্যাটফর্মের দৈর্ঘ্য মেপেছ আমরা সেটাকে বলেছি L_0, কিন্তু তোমার বন্ধু যখন মেপেছে সেটাকে L_0 বলিনি, বলেছি L, কারণ থিওরি অফ রিলেটিভিটি করতে করতে আমরা সতর্ক হয়ে গেছি! আমরা জানি দুটি দূরত্ব ভিন্ন হতে পারে কাজেই দুটোর জন্য আলাদা আলাদা নাম দেয়া ভাল। এবারে আমরা একটা দূরত্বকে অন্য দূরত্ব দিয়ে ভাগ দিই:

$$\frac{L}{L_0} = \frac{vt_0}{vt} = \frac{t_0}{t}$$

কাজেই $L = L_0\left(\frac{t_0}{t}\right)$

আমরা জানি $t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ সুতরাং $\frac{t_0}{t} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

কাজেই $L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

এটা হচ্ছে দৈর্ঘ্য সংকোচনের বিখ্যাত সূত্র। সবাইকে আবার মনে করিয়ে দেয়া যাক, আমাদের সাপেক্ষে স্থির দাড়িয়ে আছে সেরকম কোনোকিছুর দৈর্ঘ্য যদি আমরা মাপি তা হলে সেটা হচ্ছে L_0, আমাদের সাপেক্ষে গতিশীল কোনোকিছুর দৈর্ঘ্য হচ্ছে L এবং এই দুটোর সম্পর্কটা দেয়া হয়েছে দৈর্ঘ্য সংকোচনের এই বিখ্যাত সূত্রটি দিয়ে।

আমরা আমাদের দৈনন্দিন জীবনে দৈর্ঘ্য সংকোচনের বিষয়টা দেখাতে পাই না কারণ আলোর বেগ অনেক বেশি এবং আলোর বেগের কাছাকাছি না যাওয়া পর্যন্ত দৈর্ঘ্য সংকোচনটা চোখে পড়ে না। 2 নম্বর টেবিলে গতিবেগ কত হলে দৈর্ঘ্য কতটুকু সংকুচিত হবে তার একটা ধারণা দেয়া হয়েছে।

আলোর বেগ যদি খুব কম হতো- ঘণ্টায় তিরিশ কিলোমিটার তাহলে আমরা অবাক হয়ে দেখতাম চারপাশে গতিশীল সবকিছু চ্যাপটা হয়ে যাচ্ছে! গাড়ি চ্যাপটা হয়ে যাচ্ছে, বাস, ট্রাক চিড়ে চ্যাপটা হয়ে যাচ্ছে। তবে এখানে কিন্তু একটা জিনিস লক্ষ রাখতে হবে–গতিশীল একটা বস্তু সংকুচিত হয় তার গতির দিকে। অর্থাৎ যেটা সামনে কিংবা পিছনে যাচ্ছে সেটা সংকুচিত হয় সামনে পিছনে, তার উচ্চতার কোনো পরিবর্তন হয় না। যেটা উপরে নিচে যাচ্ছে তার উচ্চতা সংকুচিত হয় কিন্তু সামনে পিছনে কোনো পরিবর্তন হয় না!

2 নম্বর তালিকা

গতিবেগ	দৈর্ঘ্যের সংকোচন
$10\,km/h$ (হাঁটা)	$2\times10^{-14}\,\%$
$100\,km/h$ (গাড়ি)	$2\times10^{-12}\,\%$
$1000\,km/h$ (প্লেন)	$2\times10^{-10}\,\%$
$15\,km/s$ (রকেট)	$2\times10^{-7}\,\%$
$0.1c$	$2.0\,\%$
$0.99c$	7.0 গুণ
$0.999c$	22.0 গুণ
$0.999999\,c$	700 গুণ

লরেন্টেজের রূপান্তর

গ্যালেলিয়ান রূপান্তর

স্পেশাল থিওরি অফ রিলেটিভিটি করার সময় আমরা কিন্তু উল্টো দিক থেকে এসেছি সেটা হয়তো কেউ টের পায় নি। পদার্থবিজ্ঞানের বইয়ে যখন কেউ স্পেশাল রিলেটিভিটি পড়ে তখন লরেন্টেজ **রূপান্তর**টা আগে পড়ে, সময়ের প্রসারণ কিংবা দৈর্ঘ্যের সংকোচন সেগুলো এখান থেকেই বের করা যায়। আমরা একটা শর্ট কাট করে ফেলেছি– লরেন্টেজ **রূপান্তর** না শিখেই সময়ের প্রসারণ আর দৈর্ঘ্যের সংকোচন শিখে ফেলছি! তাতে কোন ক্ষতি হয় নি, কিন্তু আমার মনে হয় স্পেশাল রিলেটিভিটি পুরোটুকু শেখার জন্যে লরেন্টেজ **রূপান্তর**টাও জানা দরকার।

এটা বোঝার জন্যে আবার তোমাকে আর ট্রেনে বসে থাকা তোমার বন্ধুকে দরকার হবে। তবে এবার কল্পনা করে নিই তুমি প্ল্যাটফর্ম থেকে ত্রিশ কিলোমিটার দূরে দাঁড়িয়ে আছ। তোমরা বন্ধু ট্রেনে করে আসছে, ট্রেনের গতি ঘণ্টায় ষাট কিলোমিটার, যার অর্থ প্রতি মিনিটে ট্রেনটা স্টেশনের দিকে এক কিলোমিটার করে এগিয়ে যাচ্ছে।

আমরা আরো একটা বিষয় কল্পনা করে নিই–যদিও আমরা স্পেশাল রিলেটিভিটির অনেক কিছু শিখেছি, কিন্তু কল্পনা করে নিই আমরা তার কিছুই জানি না!

ট্রেনটা এগিয়ে আসতে আসতে একটা সময় আসল যখন রেললাইনের পাশে দাঁড়িয়ে থাকা তুমি এবং ট্রেনে বসে থাকা তোমার বন্ধু স্টেশন থেকে সমান

দূরত্বে। ঠিক সেই মুহূর্তে কেউ যদি তোমাকে জিজ্ঞেস করে, "স্টেশনটা কত দূর?" তুমি বলবে "ত্রিশ কিলোমিটার", তোমার বন্ধু বলবে "ত্রিশ কিলোমিটার।" ট্রেনটা এগিয়ে যাচ্ছে কাজেই পাঁচমিনিট পর কেউ যদি তোমাদের জিজ্ঞেস করে, "স্টেশনটা কত দূর?" তা হলে তুমি আবারও বলবে, "ত্রিশ কিলোমিটার", কিন্তু তোমার বন্ধু বলবে, "পঁচিশ কিলোমিটার!" এভাবে দশ মিনিট পর যদি জিজ্ঞেস করা হয়, তুমি আবারও বলবে, "স্টেশনটা ত্রিশ কিলোমিটার দূরে", কিন্তু তোমার বন্ধু বলবে, "বিশ কিলোমিটার!" তার কারণ যতই সময় যাচ্ছে ততই তোমার বন্ধু এবং স্টেশনের মাঝে দূরত্বটুকু কমে যাচ্ছে। এখন আমরা বলতে পারি যে তুমি এবং তোমার বন্ধু দুজনেই দূরত্ব মাপার চেষ্টা করছ। তোমার মাপা দূরত্বটুকু যদি হয় x আর তোমার বন্ধুর মাপা দূরত্ব যদি হয় x' তা হলে বলা যায়:

$$x' = x - vt$$

এই সূত্র থেকে স্পষ্ট দেখা যাচ্ছে তোমার বন্ধু যখন দূরত্বটা মাপছে সময়ের সাথে সাথে সেটা কমে যাচ্ছে।

এখানে আসলে আমরা দুটো রেফারেন্স ফ্রেম কল্পনা করেছি–একটা স্থির রেফারেন্স ফ্রেম বা তোমার রেফারেন্স ফ্রেম, আরেকটা তোমার বন্ধুর রেফারেন্স ফ্রেম বা চলমান রেফারেন্স ফ্রেম। তোমার রেফারেন্স ফ্রেম থেকে কোনো দূরত্ব মাপা হলে সেটাকে বলা হয় x, তোমার বন্ধুর চলমান রেফারেন্স ফ্রেম থেকে কোনো দূরত্ব মাপা হলে সেটাকে বলা হয় x'। আমাদের দৈনন্দিন জীবনে রেল লাইনের পাশে দাড়িয়ে থাকা তোমরা কিংবা ট্রেনের ভেতরে বসে থাকা বন্ধুর ঘড়ির সময়ে কোনো পার্থক্য দেখা যাবে না তবুও আমরা বলি, তুমি যখন সময় মাপ সেটা হচ্ছে t এবং তোমার বন্ধু যখন মাপে সেটা হচ্ছে t' এবং যেহেতু দুটোর মাঝে কোনো পার্থক্য নেই কাজেই $t = t'$ (আমরা জানি থিওরি অফ রিলেটিভিটি বলেছে পার্থক্য আছে - কিন্তু এখন আমরা ভান করছি সেটা আমরা জানি না!)

পুরো ব্যাপারটা গুছিয়ে আমরা বলতে পারি: তুমি যে দূরত্ব আর সময় মাপছ সেটা হচ্ছে x এবং t এবং তোমার বন্ধু v বেগে চলন্ত ট্রেনে বসে থেকে যে দূরত্ব আর সময় মাপছে সেটা হচ্ছে x' এবং t' । এখন আমাদেরকে যদি বলা হয় চলন্ত ট্রেনে বসে থাকা অবস্থায় মাপা দূরত্ব (x') আর সময় (t')-কে স্থির থাকা অবস্থায় মাপা দূরত্ব (x) আর সময় (t) দিয়ে প্রকাশ করতে তা হলে আমরা লিখব:

$$x' = x - vt$$

$$t' = t$$

এখন উল্টোটাও করতে পারি, আমরা স্থির অবস্থায় মাপা দূরত্ব (x) আর সময় (t) চলন্ত ট্রেনে বসে মাপা দূরত্ব (x') এবং সময় (t') দিয়ে প্রকাশ করতে পারি। সেটা হবে:

$$x = x' + vt'$$

$$t = t'$$

সমীকরণ দুটো যে সত্যি তাতে কোনো সন্দেহ নেই, কারণ ঘণ্টায় ষাট কিলোমিটার বেগে গেলে ত্রিশ মিনিট পরে ট্রেনটা স্টেশনে পৌঁছে যাবে, যার অর্থ যখন $t' = 30$ মিনিট তখন $x' = 0$। তখন মিনিটে এক কিলোমিটার হিসেবে ত্রিশ মিনিটে $vt' = 30\text{km}$ কাজেই $x = 30\text{km}$ আমরা যেটা আগে থেকে জানি। (30 মিনিট সময়টুকু ট্রেনে এবং বাইরে দু জায়গাতেই সমান, কোনো পাথর্ক্য নেই।)

স্থির এবং চলমান রেফারেন্স ফ্রেমের এই সম্পর্কগুলোকে বলে গ্যালেলিয়ান রূপান্তর।

গ্যালেলিয়ান রূপান্তরের সমস্যা

বিজ্ঞানী গ্যালেলিওর সময় কেউ স্পেশাল থিওরি অফ রিলেটিভিটির কথা জানত না কাজেই এই সম্পর্কগুলোকেই সবাই সত্যি বলে জানত। গতিবেগ আলোর কাছাকাছি হলে পরেই সমস্যাগুলো চোখে পড়ে। গতিবেগ যদি কম হয় তা হলে এই গ্যালেলিয়ান পরিবর্তনটুকু মোটামুটি সঠিকভাবেই দূরত্ব আর সময়কে ব্যাখ্যা করে। গতিবেগ যদি বেড়ে যায় তা হলে সেটা আর সঠিকভাবে ব্যাখ্যা করতে পারে না। যেমন:

$$x = x' + vt'$$

যেহেতু $t = t'$ তাই বাম দিকে t দিয়ে ভাগ দিই ডান দিকে t' দিয়ে ভাগ দিই

$$\frac{x}{t} = \frac{x'}{t} + v$$

অতিক্রান্ত দূরত্ব (x) কে সময় (t) দিয়ে ভাগ দিলে বেগ পাওয়া যায় তাই $\frac{x}{t} = V$ লিখলে

$$V = v' + v$$

এখন যদি $v' = \frac{3}{4}c$ এবং $v = \frac{3}{4}c$ হয়

(অর্থাৎ ট্রেন যাচ্ছে আলোর তিন-চতুর্থাংশ বেগে (v) সেই ট্রেনে তোমার বন্ধু দৌড়াচ্ছে আলোর তিন-চতুর্থাংশ (v') বেগে এবং তুমি নিচে দাঁড়িয়ে তোমার সাপেক্ষে তোমার বন্ধু কত বেগে দৌড়াচ্ছে (V) সেটা বের করার চেষ্টা করছ!)

তাহলে আমরা দেখব $V = 1.5c$, অর্থাৎ তোমার বন্ধু আলোর দেড়গুণ বেশি গতিতে দৌড়াচ্ছে। কিন্তু আমরা জানি স্পেশাল থিওরি অফ রিলেটিভিটি অনুযায়ী সেটা সম্ভব নয়। কাজেই গ্যালেলিয়ান পরিবর্তন আসলে সঠিক নয়, কম বেগের বেলায় সেটা দিয়ে কাজ চালানো যায় কিন্তু সকল বেগের জন্য কাজ করে এরকম অন্য একটা সম্পর্ক দরকার। স্থির এবং চলন্ত রেফারেন্স ফ্রেমের দূরত্ব আর সময়ের ভেতরকার এই সম্পর্কের নামটাই হচ্ছে লরেন্টেজের রূপান্তর। যদিও পুরো ব্যাপারটাই এসেছে আইনস্টাইনের থিওরি অফ রিলোটিভিটির কারণে কিন্তু এর নাম আইনস্টাইনের রূপান্তর নয়, লরেন্টেজের রূপান্তও তার কারণটাও একটু পরেই আমরা দেখব।

লরেন্টেজ-এর রূপান্তরের

লরেন্টেজ-এর রূপান্তরের সূত্রটা কী হবে আমরা এখনও জানি না, তবে এটুকু বলতে পারি যে সেটা যা-ই হোক আমাদের দৈনন্দিন জীবনের যে-বেগ সেই বেগের জন্যে এটা গ্যালেলিয়ান পরিবর্তনের মতো হয়ে যেতে হবে। গ্যালেলিয়ান রূপান্তরের প্রথমসূত্রটা ছিল:

$$x' = x - vt$$

ধরে নিই লরেন্টেজের রূপান্তর হচ্ছে

$$x' = k(x - vt)$$

গতি বেগ যখন কম তখন $k = 1$ এর কাছাকাছি হয়ে যাবে। যারা এতক্ষণ থিওরি অফ রিলেটিভিটি মন দিয়ে পড়ে এসেছ তারা নিশ্চয়ই অনুমান করে ফেলেছ k টা কী হতে পারে কিন্তু আমরা সেটা আগে বলে ফেলব না। খাঁটি বিজ্ঞানীর মতো যুক্তিতর্ক দিয়ে অগ্রসর হয়ে সেটা বের করব!

আইনস্টাইনের স্পেশাল থিওরি অফ রিলেটিভিটির প্রথম সূত্র বলে সকল ইনারশিয়াল রেফারেন্স ফ্রেমে পদার্থবিজ্ঞানের সূত্র একই হতে হবে। তা হলে আমরা বলতে পারি স্থির রেফারেন্স ফ্রেমে চলমান রেফারেন্স ফ্রেমকে (যেমন ট্রেন) যদি মনে হয় সামনের দিকে v বেগে যাচ্ছে তা হলে চলমান রেফারেন্স ফ্রেম থেকে স্থির রেফারেন্স ফ্রেমকে মনে হবে সেটা v বেগ পিছনের দিকে অর্থাৎ সেটা $-v$ বেগে যাচ্ছে। কাজেই পদার্থবিজ্ঞানের সূত্র যদি হুবহু একই থাকে তাহলে x

এবং t দিয়ে আমরা যেরকম x´ কে লিখেছি ঠিক সেরকম x´ আর t´ দিয়ে x কে লিখতে পারব, তবে সেখানে v-এর জায়গায় লিখতে হবে $-v$ অর্থাৎ

$$x = k(x' + vt')$$

খেয়াল করো দুই জায়গাতেই কিন্তু একই k ব্যবহার করা হয়েছে, পদার্থবিজ্ঞানের সূত্র দুজায়গাতেই এক, কাজেই k টাও এক হতে হবে, অন্য কিছু হতে পারবে না।

এবারে আমরা কিছু অ্যালজেবরা করি, মোটেও কঠিন অ্যালজেবরা নয় তবে একটু ধৈর্য ধরে করতে হবে। ইচ্ছে করলেই আমরা উত্তরটা লিখে দিতে পারি কিন্তু আমরা সেটা করব না। থিওরি অফ রিলেটিভিটির মতো পদার্থবিজ্ঞানের এত চমকপ্রদ ব্যাপার যদি প্রতিটি লাইন বুঝে বুঝে না করি তা হলে আনন্দটা কোথায়? শুরু করা যাক আইনস্টাইনের দ্বিতীয় সূত্র দিয়ে, অর্থাৎ আলোর বেগ দুটি রেফারেন্স ফ্রেমেই সমান কাজেই যদি দুটি রেফারেন্স ফ্রেমেই একটা আলোকরশ্মিকে একটা সময় পর্যন্ত যেতে দেয়া হয় তাহলে সেটা খানিকটাএকটা দূরত্ব অতিক্রম করবে। একজন বলবে সেটা হচ্ছে

$$x = ct$$

অন্যজন বলবে সেটা হচ্ছে

$$x' = ct'$$

এবং দুজনেই সঠিক। দ্বিতীয় সমীকরণটি থেকে x´ এবং t´ সরিয়ে শুধু x এবং t-তে নিয়ে আসা যাক। বাম দিকের অংশটি সহজ। আমরা লিখব $x' = k(x - vt)$ ডানদিকের জন্যে একটু অ্যালজেবরা করতে হবে। শুরু করা যাক। আমরা এর মাঝে বলেছি

$$x = k(x' + vt')$$

কাজেই

$$\frac{x}{k} = x' + vt'$$

অর্থাৎ

$$vt' = \frac{x}{k} - x'$$

কিংবা

$$t' = \frac{x}{kv} - \frac{x'}{v}$$

এখন আমরা x´-এর জায়গায় লিখতে পারি $x' = x - vt$

সুতরাং

$$t' = \frac{x}{kv} - \frac{k(x - vt)}{v}$$

এবারে ডান দিকের অংশটা একটু গুছিয়ে লেখা যাক যেখানে t আর x গুলো আলাদা আলাদা থাকে

অর্থাৎ: $$t' = \frac{x}{kv} - \frac{kx}{v} + \frac{kvt}{v}$$

কিংবা $$t' = kt + \frac{x}{kv}(1-k^2)$$

শেষ পর্যন্ত আমরা t' এর জন্যে একটা কিছু পেয়েছি যেটা লেখা হয়েছে x এবং t দিয়ে।

এবারে $x' = ct'$ এর বাম দিকে এবং ডান দিকে যথাযথ রাশিগুলো বসনো যাক:

$$k(x\text{-}vt) = c(kt + \frac{x}{kv}(1-k^2))$$

এই সমীকরণ থেকে এখন বের করা যাক x সমান কত।

অর্থাৎ, $$kx - kvt = ckt + \frac{cx}{kv}(1-k^2)$$

কিংবা $$kx - \frac{cx}{kv}(1-k^2) = ckt + kvt$$

কিংবা $$x(k - \frac{c}{kv}(1-k^2)) = kt(c+v)$$

কিংবা $$x = \frac{k(c+v)}{k - \frac{c(1-k^2)}{kv}}t$$

কিন্তু আমরা জানি $$x = ct$$

কাজেই নিশ্চয়ই $$\frac{k(c+v)}{k - \frac{c(1-k^2)}{kv}} = c$$

আর একটুখানি অ্যালজেবরা বাকি আছে:

$$k(c+v) = kc - \frac{c^2}{kv}(1-k^2)$$

$$kc + kv = kc - \frac{c^2}{kv} + \frac{c^2 k}{v}$$

দুই পাশ থেকে kc সরিয়ে নিই

$$kv = -\frac{c^2}{kv} + \frac{c^2 k}{v}$$

দুইপাশেই kv দিয়ে গুণ দেয়া যাক

$$k^2 v^2 = -c^2 + c^2 k^2$$

এখান থেকে খুব সহজ একটা সূত্র পেয়েছি k^2-এর জন্যে:

$$k^2(c^2 - v^2) = c^2$$

দুই পাশেই c^2 দিয়ে ভাগ দিই

$$k^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) = 1$$

অর্থাৎ $$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ঠিক আমরা শুরুতে যেটা অনুমান করেছিলাম! তবে আমরা কিন্তু অনুমান করে বসিয়ে দিই নি- রীতিমতো অঙ্ক কষে বের করেছি। এখন আমরা তাহলে লরেন্টেজের রূপান্তর লিখতে পারি:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

আমরা t'-এর জন্য কিছু লিখি নি, এবারে সেটাও লেখা যাক। যেহেতু $x' = ct'$

কাজেই
$$t' = \frac{x'}{c} = \frac{\frac{x}{c} - \frac{vt}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

কিন্তু আমরা জানি $x = ct$ কাজেই সূত্রটাকে একটু গুছিয়ে লেখা যাক। প্রথম অংশে রাখতে চাই t দ্বিতীয় অংশে রাখতে চাই x

অর্থাৎ,
$$t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

x এবং t দিয়ে x' এবং t' প্রকাশ করার এই সূত্রটাকে বলা হয় লরেন্টেজের রূপান্তর।

কেন আইনস্টাইনের রূপান্তর নয়

আইনস্টাইনের থিওরি অফ রিলেটিভিটির সূত্র দুটি ব্যবহার করে এই রূপান্তরটি বের করা হয়েছে, তবুও এই রূপান্তরকে আইনস্টাইনের রূপান্তর না বলে লরেন্টেজের রূপান্তর বলা হয় তার একটা কারণ আছে। বিদ্যুৎ-চৌম্বকীয় যে-সূত্রগুলো আছে সেগুলো একটা রেফারেন্স ফ্রেম থেকে অন্য রেফারেন্স ফ্রেমে রূপান্তর করলে সেগুলো কাজ করতো না। তখন বিজ্ঞানী লরেন্টেজ অনেক খেটেখুটে কিছু রূপান্তর বের করলেন যেটা ব্যবহার করলে বিদ্যুৎ চৌম্বকীয় সূত্রগুলো সঠিকভাবে কাজ করত। বিজ্ঞানী লরেন্টেজের সেই রূপান্তরগুলোই আমরা এইমাত্র বের করেছি। বিজ্ঞানী লরেন্টেজ এই রূপান্তর গুলো প্রথম বের করেছিলেন সত্যি কিন্তু তিনি ঘুর্ণাক্ষরেও সন্দেহ করেন নি যে এগুলো আসলে একটা যুগান্তকারী ব্যাপার ইঙ্গিত দিচ্ছে, যেখানে সময় এবং দূরত্ব সম্পূর্ণ নূতনভাবে প্রকাশ হতে যাচ্ছে। তার কাছে এই রূপান্তর ছিল নেহায়েতই জোর করে বসিয়ে দেয়া কিছু নিয়ম। আইনস্টাইনের স্পেশাল থিওরি অফ রিলেটিভিটি দিয়ে যখন এগুলো আবার নূতন করে করা হয়েছে তখন এর সত্যিকার গুরুত্বটুকু প্রথমবার সবাই সেটি বুঝতে পেরেছে!

যদিও বিজ্ঞানী লরেন্টেজ এই রূপান্তরের সূত্রগুলির সত্যিকারের গুরুত্বটুকু ধরতে পারেন নি তবুও যেহেতু তিনিই প্রথমে এই সূত্রগুলি বের করেছিলেন সেজন্যে তাঁর প্রতি সম্মান দেখিয়ে এই রূপান্তরের সূত্রগুলোকে বলা হয় লরেন্টেজের রূপান্তর।

স্পেস টাইম

আমরা রূপান্তর গুলো দেখে ফেলেছি তবুও আবার একবার একসাথে লেখা যাক যেন তোমরা সবাই এর দিকে দীর্ঘ সময় তাকিয়ে থাকতে পারো, কারণ বিশ্বজগতের পুরো কাঠামোটাই এই সূত্রগুলো পরিবর্তন করে ফেলেছিল।

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

এখানে x', t' কী এবং x, t কী সেটা আগেই বলে দেয়া হয়েছে। বিষয়টা যেহেতু গুরুত্বপূর্ণ আমরা আবার একটা উদাহরণ দিয়ে পুরোটা নূতন করে আরও একবার ঝালাই করে নিই।

ধরা যাক তুমি একটা রেললাইনের পাশে দাঁড়িয়ে আছ, ধরা যাক সময়টা রাত এবং অন্ধকার। এবং ঠিক তখন তোমার পাশ দিয়ে একটা ট্রেন যাচ্ছে v বেগে। সেই ট্রেনে তোমার বন্ধু বসেছিল। তোমার বন্ধু ঠিক যখন তোমাকে অতিক্রম করে সেই সময়ে তোমাদের দুজনের ঘড়িতেই দেখাচ্ছে সময়ের মান শূন্য। শুধু তাই নয় তোমরা ঠিক করলে সময়ের মান যখন শূন্য তখন তোমরা যে অবস্থানে ছিলে সেখানকার দূরত্বেও মানও শূণ্য। অর্থ্যাত যদি কোনো দূরত্ব মাপতে হয় তাহলে সেই অবস্থানের সাপেক্ষে দূরত্বটা মাপতে হবে। হঠাৎ করে তুমি দেখলে একটা জোনাকি পোকা একবার জ্বলে উঠে আবার নিভে গেল। তখন আমি যদি তোমাকে জিজ্ঞেস করি, "জোনাকি পোকাটা কোথায়?" উত্তরে তুমি যদি বল এটা আমার কাছ থেকে x দূরত্বে আছ তা হলে কিন্তু উত্তরটা সম্পূর্ণ হবে না

কারণ হয়তো জোনাকি পোকাটা উড়ছে, একটু পরেই সেটা আর x দূরত্বে নাও থাকতে পারে। কাজেই পুরোপুরি উত্তর দিতে হলে তোমাকে বলতে হবে t সময়ে এটা x দূরত্বে আছে। যার অর্থ সময়ের পরিবর্তন হলে এর দূরত্বের পরিবর্তন হতেই পারে কিন্তু যখন ঘড়িতে দেখিয়েছে সময়টা t তখন জোনাকি পোকাটা ছিল x দূরত্বে।

তুমি যখন জোনাকি পোকার অবস্থান এবং ঘড়িতে সময় মাপছ তখন তুমি শক্ত মাটির ওপর দাঁড়িয়ে ছিলে। তোমার অনুমানে তুমি স্থির। তুমি জান তোমার বন্ধু ট্রেনে বসে আছে এবং এই ট্রেনটা যাচ্ছে v বেগে। তোমার বন্ধুর কাছে অবশ্যি মনে হবে সে স্থির, রেল লাইন এবং আশে পাশের সব কিছু $-v$ বেগে ছুটে যাচ্ছে! ধরা যাক তোমার বন্ধু এই চলন্ত ট্রেনে বসে সেই একই জোনাকি পোকার দূরত্ব আর সময়টুকু মাপছে। চলন্ত ট্রেনে ছিল বলে তার মাপা দূরত্ব আর তার ঘড়িতে সময় দুটোই ভিন্ন হবে, এই দূরত্ব আর সময়টিকে বোঝানো হয়েছে x' এবং t' দিয়ে। লরেন্টজের রূপান্তরের সূত্র থেকে আমরা x আর t এর সাথে x' আর t' এর কী সম্পর্ক সেটা বের করা শিখে গেছি। সূত্রগুলোর দিকে তাকিয়ে দেখলে তুমি নিশ্চয়ই দেখছ ট্রেনে বসে তোমার বন্ধু যে দূরত্ব বের করেছে সেটা শুধুমাত্র তোমার মাপা দূরত্বের উপর নির্ভর করে না, তোমার মাপা সময়ের উপরেও নির্ভর করে। ঠিক সেরকম তোমার বন্ধু যে সময় বের করেছে সেটা শুধু তোমার মাপা সময়ের উপর নির্ভর করে না, তোমার মাপা দূরত্বের উপরেও নির্ভর করে। লরেন্টজের রূপান্তর থেকে আমরা প্রথমবার টের পেতে পারি দূরত্ব আর সময় আসলে আলাদা আলাদা কিছু নয়, তারা খুব ঘনিষ্ঠ সম্পর্কযুক্ত। এখান থেকেই স্পেস টাইম কথাটার জন্ম হয়েছে।

বিপরীত লরেন্টজের রূপান্তর

এবারে আমরা একটু কুট তর্ক করি। তোমার যে বন্ধু ট্রেনে যাচ্ছে সে যদি হঠাৎ করে ঘোষণা দেয় যে - সে আসলে স্থির। ট্রেনটাও স্থির দাঁড়িয়ে আছে, ট্রেনলাইন মাঠঘাট প্রান্তর সবকিছু পিছন দিকে v বেগে ছুটছে। কাজেই সে জোনাকি পোকার আলো জ্বলার মুহূর্তে যখন তার দূরত্ব আর সময় x' এবং t' মেপেছিল সেটা হচ্ছে স্থির অবস্থানে দাঁড়িয়ে থাকা অবস্থায় মাপা দূরত্ব আর সময়। উল্টো তুমি যে ট্রেনলাইনের পাশে দাঁড়িয়ে দূরত্ব আর সময় মেপেছ (x এবং t) সেটাই হচ্ছে উল্টো দিকে চলমান থাকা (x' এবং t' $-v$ বেগে) মাপা দূরত্ব আর সময়। তা হলে কী হবে? লরেন্টজের রূপান্তরের তাতে কিন্তু বিন্দুমাত্র সমস্যা নেই।

আমরা জানি সেই একই সূত্র [illegible], শুধু x এবং t জায়গায় লেখো x' এবং t', x' এবং t' এর জায়গায় লেখো x এবং t এবং v এর জায়গায় বসিয়ে দেব $-v$, অর্থাৎ

$$x = \frac{x' - (-v)t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{t' - \frac{(-v)x'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

মনে রাখতে হবে তোমার বন্ধু জোরাজুরি করছে বলে এখানে x', t' হচ্ছে স্থির রেফারেন্স ফ্রেম এবং x, t হচ্ছে $-v$ বেগে চলমান ফ্রেম। [illegible] লরেন্টজের রূপান্তরের এই [illegible] যখন এভাবে লেখা হয় [illegible] চলমান রেফারেন্সের [illegible], [illegible] স্থির রেফারেন্স ফ্রেমের [illegible]।

লরেন্টেজের রূপান্তরের ব্যবহার

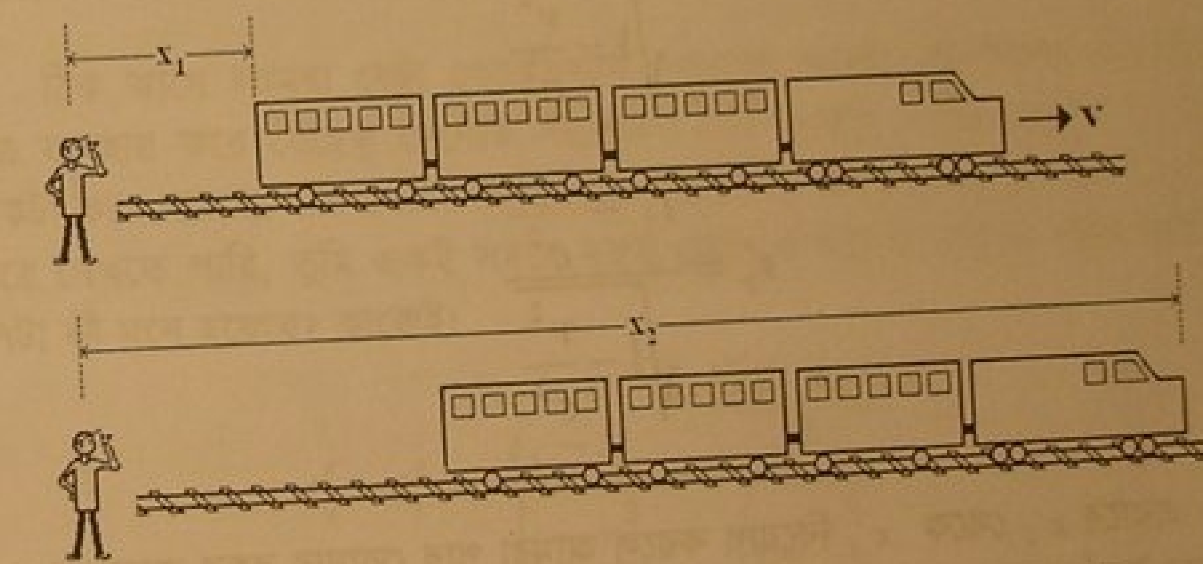
দৈর্ঘ্য সংকোচন : আবার

আমরা আগেই একবার দেখিয়েছি যে আইনস্টাইনের থিওরি অফ রিলেটিভিটি থেকে দৈর্ঘ্যের সংকোচন হয়। কেউ যেন মনে না করে যে এটা একধরনের বিভ্রান্তি, আসলে কিছু সংকুচিত হচ্ছে না–শুধু আমাদের কাছে দৈর্ঘ্য সংকুচিত হচ্ছে বলে মনে হচ্ছে, অর্থাৎ এটি আসলেই হয়, সত্যি সত্যিই সংকোচন ঘটে যায়! আমরা আগেই দেখেছি যে স্থির অবস্থানের তুলনায় যা কিছু নড়ছে তারই দৈর্ঘ্যের সংকোচন হচ্ছে! আমরা যদি আবার তোমার এবং ট্রেনে বসে থাকা তোমার বন্ধুর উদাহরণ নিই তা হলে দেখব যে তোমার কাছে মনে হবে ট্রেনটা সংকুচিত হয়ে গেছে কারণ তুমি স্থির এবং তোমার তুলনায় ট্রেনটা গতিশীল। আবার তোমার বন্ধুর কাছে মনে হবে তুমি (এবং তোমার সাথে সাথে ট্রেন স্টেশন, আশেপাশে থাকা গাছপালা নদী ধানক্ষেত সবকিছু) সংকুচিত হয়ে গেছে কারণ তার কাছে সে স্থির এবং তুমি এবং তোমার চারপাশের সবকিছু গতিশীল! মনে রাখতে হবে সংকোচনটা হবে যেদিকে গতিশীল সেদিকে অন্য কোনো দিকে কিন্তু কোনো সংকোচন হয় না, কোনো পরিবর্তন হয় না। কেউ যদি প্রশ্ন করে, আসলে কোনটা সত্যি? ট্রেনটা সংকুচিত হচ্ছে, নাকি তুমি সাংকুচিত হচ্ছ? উত্তর হচ্ছে দুটো উত্তরই সত্যি। তোমার কাছে ট্রেনের সংকোচন যেরকম সত্যি ঠিক সে রকম ট্রেনে বসে থাকা তোমার বন্ধুর কাছে তোমার সংকোচনটাও সেরকম সত্যি। একটা বেশি সত্যি অন্যটা কম সত্যি সেরকম কিছু নয়!

যাই হোক আমরা দৈর্ঘ্যের সংকোচনটা বের করেছিলাম সময়ের প্রসারণ ব্যবহার করে। এবারে সেটা বের করি লরেন্টেজের রূপান্তরের সূত্রগুলো দিয়ে।

আমরা এতবার এই সূত্রগুলোর কথা বলেছি এবং লিখেছি যে এতক্ষণে সেটা না চাইতেই নিশ্চয়ই সবারমুখস্থ হয়ে গেছে! ট্রেনের উদাহরণটা আগে যেহেতু অনেকবার নেয়া হয়েছে সেটাই তা হলে আবার নেয়া যাক। কল্পনাই যখন করছি তখন ভাল করেই কল্পনা করি, ধরে নেই ট্রেনটা অসাধারণ একটা ট্রেন–যেটা আলোর বেগের কাছাকাছি বেগে যেতে পারে। ধারা যাক তুমি রেললাইনের পাশে দাড়িয়ে ট্রেনটার দৈর্ঘ্য মাপতে চাইছ।

কোনো জিনিসের দৈর্ঘ্য মাপা মোটামুটি সহজ, জিনিসটির এক মাথার দূরত্বটুকু মাপতে হয় তারপর অন্য মাথায় দূরত্বটুকু মাপতে হয়। সামনের দূরত্ব থেকে পিছনের দূরত্বটি বিয়োগ করলেই দৈর্ঘটি বের হয়ে যায়। কাজেই আমরা যদি প্রথমে চলন্ত ট্রেনটির শেষ অংশের দূরত্ব মাপি এবং তার কিছুক্ষণ পর ট্রেনের সামনের অংশের দূরত্বটি মাপি তাহলে (7 নং ছবি) কি ট্রেনের দৈর্ঘ্য পাব? ট্রেনটি স্থির থাকলে পেতাম কিন্তু যেহেতু ট্রেনটি চলছে আমরা সঠিক দৈর্ঘ্য পাব না, কারণ ট্রেনের পিছনের অংশের দূরত্ব মাপার পর যখন সামনের দূরত্বটুকু মাপতে গেছি ততক্ষণে ট্রেনটা আরো খানিকটা সামনে এগিয়ে গেছে! কাজেই ট্রেনের দূরত্ব মাপার একটাই উপায়–একই সাথে ট্রেনের পেছনের অংশ এবং সামনের অংশের দূরত্ব মাপা।



7 নং ছবি: ট্রেনের পিছনের অংশের দূরত্ব x_1 সামনের অংশের দূরত্ব x_2, $x_2 - x_1$ ট্রেনের দূরত্ব হতে পারত যদি ট্রেনটি স্থির হতো। যেহেতু ট্রেনটি এগিয়ে যাচ্ছে তাই x_1 এবং x_2 মাপার সময় খানিকটা সময় পার হয়ে গেলে আমরা সঠিক দৈর্ঘ্য মাপতে পারব না। সঠিক দূরত্ব মাপার জন্য একই সময়ে x_1 এবং x_2 মাপতে হবে।

এবারে আমরা লরেন্টেজের রূপান্তরের সূত্রগুলো ব্যবহার করে পুরো বিষয়টা আরো স্পষ্ট করে দেখি। ধরা যাক, তুমি রেললাইনের পাশে দাঁড়িয়ে ট্রেনের শেষ অংশ এবং সামনের অংশের দূরত্ব মেপেছ যথাক্রমে t_1 এবং t_2 সময়ে। দূরত্বটুকু পেয়েছ যথাক্রমে x_1 এবং x_2 । এবারে আমরা সরাসরি বলতে পারি ট্রেনের ভেতরে বসে থাকা তোমার বন্ধুর কাছে এই দূরত্ব আর সময়কে মনে হবে (x'_1, x'_2) এবং (t'_1, t'_2), আমরা সেটা লিখেও ফেলতে পারিঃ

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{x_1 v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_2' = \frac{t_2 - \frac{x_2 v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

এবারে x'_2 থেকে x'_1 বিয়োগ করলে আমরা পাব তোমার বন্ধুর কাছে মাপা ট্রেনের দৈর্ঘ্য কারণ x'_2 এবং x'_1 হচ্ছে চলন্ত ট্রেনে বসে ট্রেনের সামনের অংশ এবং শেষ অংশের দূরত্ব। কাজেইঃ

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

আমরা আগেই বলেছি একই সময়ে দূরত্বগুলো মাপতে হবে তা না হলে সঠিক দূরত্ব পাব না অর্থাৎ $t_1 = t_2$ হলেই $x_2 - x_1$ হবে ট্রেনের দৈর্ঘ্য

কাজেই
$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$x_2' - x_1'$ হচ্ছে ট্রেনে বসে থেকে মাপা ট্রেনের দূরত্ব যেটাকে আমরা বলতে পারি L_0 তোমার বন্ধু এটা মেপেছে। তার কাছে ট্রেনটা স্থির - কাজেই L_0 হচ্ছে স্থির অবস্থায় থাকা কোনো কিছুর দৈর্ঘ্য। আর $x_2 - x_1$ হচ্ছে ট্রেন লাইনের পাশে দাঁড়িয়ে তোমার মাপা ট্রেনের দূরত্ব যেটাকে আমরা বলি L, মনে রেখো তোমার কাছে ট্রেনটা গতিশীল, কাজেই L হচ্ছে গতিশীল কোনো বস্তুর দৈর্ঘ্য।কাজেই দেখতে পাচ্ছিঃ

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

ঠিক আগে আমরা যেটা পেয়েছিলাম। এবারে আমরা লরেন্টসের রূপান্তর সূত্র ব্যবহার করে যেহেতু দৈর্ঘ্যের সংকোচন বের করেছি তাই বাড়তি আরো একটা কাজ করতে পারি যেটা আগে করতে পারি নি। সেটা হচ্ছে $t_2' - t_1'$ টা বের করে দেখতে পারি, তুমি একই সময়ে দূরত্ব মেপে থাকলেও তোমার বন্ধুর কাছে সেটা কী মনে হয়েছে? কাজেইঃ

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v(x_2 - x_1)}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

আমরা $t_2 = t_1$ ধরেছি কাজেইঃ

$$t_2' - t' = -\frac{\frac{v(x_2 - x_1)}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

যার অর্থ তোমার বন্ধুর কাছে মনে হবে $t_1' = t_2'$ নয়, অর্থাৎ তুমি একই সাথে ট্রেনের সামনের অংশ এবং পিছনের অংশের দূরত্ব মাপ নি। যেহেতু ডান পাশের অংশটি নিগেটিভ কাজেই t_2' থেকে t_1' বড়, অর্থাৎ তুমি সামনের অংশটির দূরত্ব মেপেছ আগে পিছনের অংশের দুরত্ব মেপেছ পরে! কী বিচিত্র, দেখেছ? এখানে কে সঠিক, তুমি নাকি তোমার বন্ধু? উত্তর হচ্ছে দুজনেই সঠিক! এটাই হচ্ছে স্পেশাল থিওরি অফ রিলেটিভিটির মজা।

সময়ের প্রসারণ: আবার

লরেন্টেজের রূপান্তর ব্যবহার করে যদি আমরা দৈর্ঘ্যের সংকোচন বের করতে পারি তাহলে নিশ্চয়ই সময়ের প্রসারণও বের করতে পারব। কাজটা এমন কিছু কঠিন নয়– তোমার বন্ধু ট্রেনে বসে থেকে তার ঘড়িটি চালু করল। ধরা যাক সেই সময়টা ছিল t_1', একটু পর ঘড়িটা বন্ধ করবে সেই সময়টা হবে t_2' এই সময়ের পার্থক্যটুকু হচ্ছে চলমান রেফারেন্স ফ্রেমে সময়ের পার্থক্য। লরেন্টেজের রূপান্তর দিয়ে আমরা রেললাইনের পাশে দাঁড়িয়ে থাকা তোমার সাপেক্ষে সেই সময়টাকে কতটুকু সময় মনে হয়েছে সেটা বের করব।

আমরা হুবহু আগের মতো করে আগাই, যদিও আমাদের উদ্দেশ্য সময় মাপা কিন্তু আমরা দেখছি থিওরি অফ রিলেটিভিটিতে সময় আর দূরত্ব আর আলাদা কিছু না, একটার সাথে আরেকটা জড়িয়ে থাকে তাই সময় মাপতে হলে দূরত্বটাও মাপতে হয়। কাজেই আমরা ধরে নিই ট্রেনে বসে তোমার বন্ধু তার ঘড়িটির দূরত্ব আর সময় মেপেছে। প্রথমে ছিল সেটা x_1' এবং t_1', একটু পরে সেটা হয়েছে x_2' এবং t_2'। লরেন্টেজের রূপান্তরের সূত্র দিয়ে একটু আগে আমরা বের করে দেখিয়েছি, সেটা হচ্ছে:

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v(x_2 - x_1)}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

আগের বার একই সময়ে মেপেছিল বলে $t_1 = t_2$ ছিল, এবারে আর সেটি সত্যি নয়। আমরা স্থির রেফারেন্সের তুলনায় মাপা সময় $(t_2 - t_1)$ এর সাথে চলমান রেফারেন্স ফ্রেমে মাপা সময় $(t_2' - t_1')$ বের করেছি ঠিকই কিন্তু সেটা দৈর্ঘ্য সংকোচনের মতো সুন্দও একটা সূত্র হয় নি- তার সাথে লেজের মতো আরো একটা অংশ রয়ে গেছে। যদি $x_1 = x_2$ হতো তাহলে সেটা শূন্য হয়ে

আমাদের ঝামেলা চুকিয়ে দিত কিন্তু আমরা জানি $x_1 = x_2$ নয়। তার কারণ তোমার বন্ধু ট্রেনে বসে আছে, ট্রেনটা v বেগে ছুটে যাচ্ছে। প্রথমবার যখন সময় মেপেছে তার খানিকটা পরে দ্বিতীয়বার সময় মেপেছে এবং এই সময়ের মাঝে ট্রেন বেশ খানিকটা দূর এগিয়ে গেছে কাজেই তাদের অবস্থানের পরিবর্তন হয়ে গেছে, x_1 কিছুতেই x_2 এর সমান নয়। আমরা সুন্দর একটা সূত্র পাচ্ছি না–কিন্তু আমরা জানি সুন্দর একটা সূত্র আছে, আমরা আগে সেটা দেখেছি! কাজেই একটু অন্যভাবে অগ্রসর হই।

সবার নিশ্চয়ই মনে আছে আমরা যখন লরেন্টেজের রূপান্তর বের করেছিলাম যে তোমার বন্ধু যদি একটু গোঁয়ার ধরনের হয় আর সে যদি দাবি করতে থাকে তার ট্রেন স্থির সে স্থির এবং তার চারপাশের সবকিছু–ট্রেনলাইন, স্টেশন গাছপালা ওল্টোদিকে v বেগে ছুটছে তাহলে কি হবে? আমরা বলেছিলাম সেটাও পুরোপুরি সত্যি এবং তার জন্যে লরেন্টেজ রূপান্তর হবে এরকম:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t + \frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

যেহেতু এই সূত্রগুলো পুরোপুরি সঠিক এবং আসলে একটু অন্যভাবে লেখা একই সূত্র তা হলে এগুলো ব্যবহার করতে নিশ্চয়ই কোনো সমস্যা নেই। তা হলে আমরা ভিন্ন ভিন্ন অবস্থানে মাপা আর দূরত্বের জন্যে লিখিতে পারি:

$$x_1 = \frac{x_1' + vt_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x_2 = \frac{x_2' + vt_2'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

এবং $$t_1 = \frac{t_1' + \frac{x_1' v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{x_2' v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

মনে রেখো এখানো (x_1, x_2) এবং (t_1, t_2) হচ্ছে তোমার মাপা দূরত্ব এবং সময়। (x'_1, x'_2) এবং (t'_1, t'_2) হচ্ছে তোমার বন্ধুর মাপা দূরত্ব এবং সময়।

কাজেই $$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v(x_2' - x_1')}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

তোমরা নিশ্চয়ই এখন চালাকিটা ধরে ফেলেছ তোমার বন্ধু যেহেতু ট্রেনে একই জায়গায় বসে ঘড়ির সময় মেপেছে কাজেই $x_2' - x_1' = 0$ অর্থাৎ সমীকরণের ডান দিকের দ্বিতীয় অংশটি থাকছে না, যার অর্থ

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

যদি আগের মতো বলি চলমান রেফারেন্স ফ্রেমে বসে থাকা তোমার বন্ধুর কাছে মাপা সময় হচ্ছে t_0 এবং স্থির অবস্থায় থাকা তোমার মাপা সময় হচ্ছে t তা হলে

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ঠিক আগে আমরা যেরকম পেয়েছিলাম। যেহেতু আমাদের সুযোগ আছে তা হলে আমরা $x_2 - x_1$ টাও বের করে দেখে দেখি:

$$x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ডান পাশের প্রথম অংশটি শূন্য কারণ $x_2' = x_1'$ কাজেই থাকছে শুধু:

$$x_2 - x_1 = \frac{v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

কাজেই চলন্ত ট্রেনে বসে থাকা তোমার বন্ধুর কাছে মনে হয়েছে সে একই জায়গায় বসে দুটো সময় মেপেছে, কিন্তু রেললাইনের পাশে বসে থাকা তোমার মনে হয়েছে সে মোটেও একই জায়গায় নেই-ভিন্ন ভিন্ন জায়গায় থেকে সে সময়টুকু মেপেছে। ঠিক যেরকম হওয়া উচিত!

আপেক্ষিক ভর

ভরবেগের নিত্যতার সূত্র

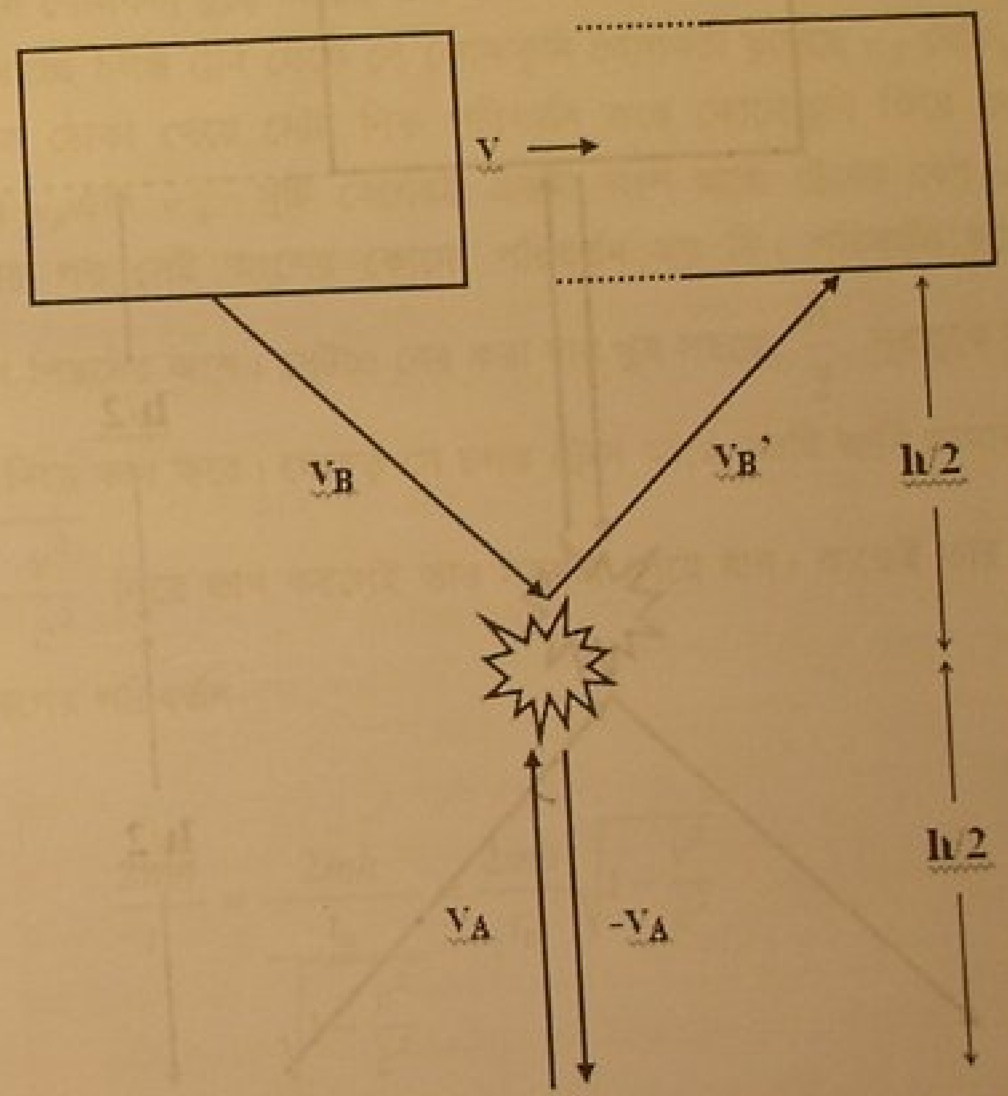
যারা খাঁটি পদার্থবিজ্ঞানী তাঁরা আপেক্ষিক ভর কথাটা দেখে খুব রাগ করবেন–কিন্তু তবু আমি এটা লিখছি, কারণ বেশির ভাগ পাঠ্য বইয়ে থিওরি অফ রিলিটিভিটি বোঝানোর জন্য আপেক্ষিক ভরের ধারণাটা ব্যবহার করা হয়। যারা খাঁটি পদার্থবিজ্ঞানী তাঁরা আপেক্ষিক ভরের ধারণা ছাড়াই থিওরি অফ রিলেটিভিটি ব্যাখ্যা করেন, কিন্তু আপেক্ষিক ভরের ধারণাটা ব্যবহার করলে বিষয়টা বোঝা অনেক সহজ হয়। অতীতে অনেক বড় বিজ্ঞানীই সেটা করেছেন, আমরাও না হয় করলাম!

বিষয়টা বোঝার জন্যে আবার তোমাকে রেললাইনের পাশে দাঁড়াতে হবে এবং আবার ধরে নিতে হবে তোমার বন্ধু ট্রেনে করে যাচ্ছে v বেগে। এবারে দুজনেই একই উচ্চতায় আছ এবং দুজনের কাছেই একটা করে গোলক। গোলকগুলো হুবহু একরকম–অর্থাৎ তোমার বন্ধু ট্রেনে ওঠার আগে তোমার গোলকটার সাথে তার গোরকটা মিলিয়ে দেখেছে তাদের ভর সমান, আকার-আকৃতি সমান।

যাই হোক, তোমার এবং তোমার বন্ধুর ওপর দায়িত্ব যে তোমরা একে অন্যের দিকে গোলক দুটো এমনভাবে ছুড়ে দেবে যেন গোলক দুটো ঠোকা খেয়ে আবার তোমাদের হাতে ফিরে আসে! (পৃথিবীতে এই পরীক্ষাটা করলে মাধ্যাকর্ষণ শক্তির জন্যে আসলে গোলক দুটো নিচে পড়ে যেতে চাইবে তাই আপাতত ধরে নিই মাধ্যাকর্ষণ শক্তি নেই–অর্থাৎ গোলকটা ছুড়ে দিলে সেটা সোজা সামনে যায় এবং কোথাও ধাক্কা খেলে সোজা ফিরে আসে!)

এবারে আমরা পরীক্ষাটা করি, ট্রেনে করে তোমার বন্ধু আসছে, তুমি রেললাইনের পাশে দাঁড়িয়ে আছ, নির্দিষ্ট সময়ে তোমরা দুজনেই তোমাদের গোলক দুটো ছুড়ে দিল, একই বেগে, ঠিক মাঝখানে বল দুটো ঠোকা খেলো, তোমার গোলকটা তোমার হাতে ফিরে এল, তোমার বন্ধুর গোলকটা তোমার বন্ধুর হাতে ফিরে গেল।

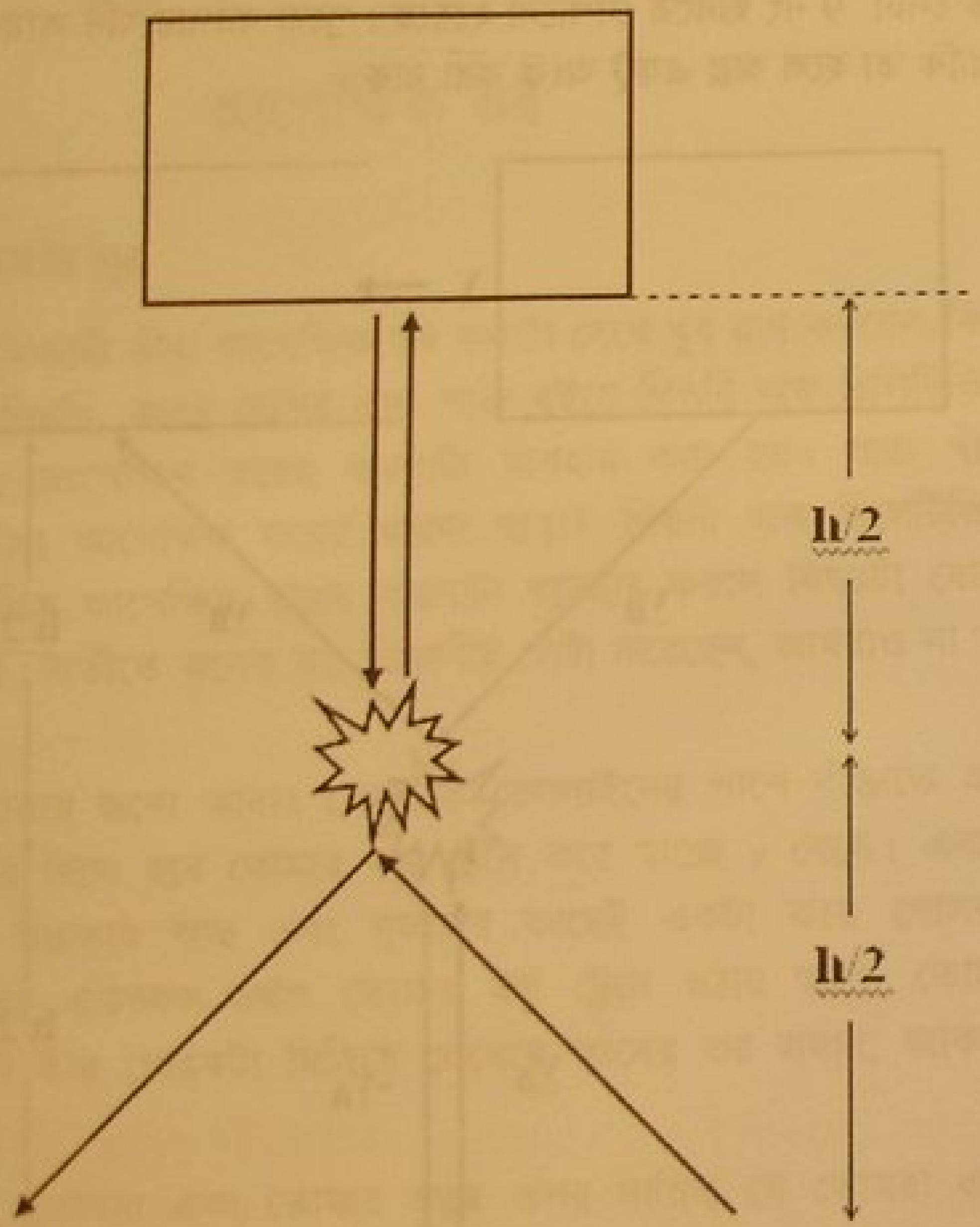
কোনো একজন যদি ট্রেনের ছাদে বসে এই দৃশ্যটা দেখত তা হলে সে কেমন দেখত সেটা ৪ নং ছবিতে দেখানো হয়েছে। আবার কেউ যদি তোমার উপরে ঝুলে থেকে কোনোভাবে দৃশ্যটা দেখত তা হলে তার কাছে দৃশ্যটা কেমন দেখতে সেটা 9 নং ছবিতে দেখানো হয়েছে। পুরো ব্যাপার যদি আমরা ঠিকভাবে বুঝে থাকি তা হলে অল্প একটু অংক করা যাক।



৪ নং ছবি: তুমি দেখছ গোলকটা সোজা সামনে গিয়েছে, বন্ধুর গোলকে ঠোকা খেয়ে তোমার কাছে ফিরে এসেছে। তোমার মনে হয়েছে বন্ধুর গোলকটা আসছে কোনাকুনি ভাবে, তোমার গোলকে ঠোকা খেয়ে দিক পরিবর্তন করে তোমার বন্ধুর নূতন অবস্থায় ফিরে গেছে।

তুমি বলবে এরকম: আমার গোলকটার ভর m_0, আমি গোলকটাকে ছুড়ে দিয়েছি সামনে, সেটা $t_0/2$ সময় পরে ঠোকা খেয়েছ এবং ফিরে এসেছে আরো $t_0/2$ সময়ে। যেহেতু আমার এবং ট্রেনের ভেতরকার দুরত্ব h, কাজেই এটা ঠোকা খেয়েছে ঠিক মাঝখানে অর্থাৎ $\frac{h}{2}$ দূরত্বে। যার অর্থ বলটা যাচ্ছিল v_A বেগে

$$v_A = \left(\frac{h}{2}\right)/\left(\frac{t_0}{2}\right) = \frac{h}{t_0}$$



9নং ছবি: তোমার বন্ধুর কাছে মনে হয়েছে ট্রেনটা স্থির–গোলকটা সোজা সামনে গিয়ে, আবার নিজের কাছে ফিরে এসেছে। তোমার বন্ধু দেখেছে তুমি গোলকটা ছুড়েছ কোনাকুনি, এবং তুমি নূতন জায়গায় সরে গিয়ে গোলকটা ধরেছ!

গোলকটা ঠোকা খাওয়ার পর সেটা ফিরে এসেছে v_A বেগে, কাজেই ভরবেগের পরিবর্তন

$$m_0 v_A - (-m_0 v_A) = 2m_0 v_A = \frac{2m_0 h}{t_0}$$

এখন যদি তোমাকে তোমার বন্ধুর গোলকটা সম্পর্কে বলতে বলা হয় তা হলে তুমি বলবে এভাবে: আমি জানি আমার গোলকের ভর হচ্ছে m_0, আমার বন্ধু যেহেতু চলন্ত ট্রেনে আছে, এবং আমরা ইতোমধ্যে দেখেছি চলন্ত জায়গায় দৈর্ঘ্যের সংকোচন হয় সময়ের প্রসারণ হয় কাজেই ভরেরও পরিবর্তন হতে পারে, কাজেই সে যখন গোলকটা ছুড়ে দিয়েছে তার ভর কত আমি জানি না। ধরে নিই সেট m. দেখা যাচ্ছে চলন্ত ট্রেন থেকে সে কোনাকুনি গোলকটা ছুড়েছে v_B বেগে, আমার গোলকে ঠোকা খেয়ে সেটা দিক পরিবর্তন করে কোনোকুনি ফিরে গেছে v'_B বেগে। v_Bএবং v'_B দুটি বেগেরই একটা অংশ হচ্ছে ট্রেনের বেগ v, ঠোকা খাওয়ার পর সেই অংশের কোনো পরিবর্তন হয় নি। পরিবর্তন হয়েছে শুধু সামনে-পিছনের অংশ। সেটাও বের করা যায় খুব সহজে, $\frac{h}{2}$ দূরত্বকে অতিক্রান্ত সময় দিয়ে ভাগ করে। যেহেতু সে চলন্ত ট্রেনে আছে, আমি জানি আমার সময়কে $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ দিয়ে ভাগ করলেই তার সময়টা পেয়ে যাব। কাজেই তার গোলকের ভরবেগের পরিবর্তন

$$\frac{2mh}{t} = \frac{2mh}{\frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{2mh}{t_0}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

এতক্ষণ আমরা যুক্তিতর্ক ব্যবহার করেছি, এবারে একটু পদার্থবিজ্ঞান ব্যবহার করি। পদার্থবিজ্ঞানে বলা হয় কোনো বল (Force) প্রয়োগ করা না হলে ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হতে পারবে না। এখানে কোনো বল (Force) প্রয়োগ

করা হয় নি–কাজেই ভর বেগের কোনো পরিবর্তন হতে পারবে না, অর্থাৎ তোমার গোলকের ভরবেগের যে পরিবর্তন হয়েছে, তোমার বন্ধুর গোলকের (বিপরীত দিকে) ঠিক সমান পরিবর্তন হতে হবে যেন সব মিলিয়ে কোনো পরিবর্তন না হয়। অর্থাৎ

$$\frac{2m_0h}{t_0} = \frac{2mh}{t_0}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

কিংবাঃ

$$m = \frac{mo}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

এখানে m_0 হচ্ছে তোমার গোলকের ভর, m হচ্ছে তোমায় বন্ধুর গোলকের ভর বা আপেক্ষিক ভর (Relativistic mass)। আমরা আগেই বলেছি দুজনের গোলকই ছিল হুবহু এক রকম এবং তাদের ভরও ছিল সমান। তোমার বন্ধুর গোরকটার ভর কিন্তু এখন m_0 নয়, m_0 থেকে বেশি। থিওরি অফ রিলেটিভিটি বলছে, একটা বস্তু যদি গতিশীল হয় তা হলে তার ভর বেড়ে যায়। কত গতিতে বস্তুর ভর শতকরা কত ভাগ বেড়ে যায় সেটা 3নং তালিকায় দেয়া হলঃ

3 নম্বর তালিকা

গতিবেগ	ভর বেড়ে যাওয়া
$10 km/h$ (হাঁটা)	2×10^{-14} %
$100 km/h$ (গাড়ি)	2×10^{-12} %
$1000 km/h$ (প্লেন)	2×10^{-10} %
$15 km/s$ (রকেট)	2×10^{-7} %
$0.1c$	2.0 %
$0.99c$	7.0 গুণ
$0.999c$	22.0 গুণ
$0.999999c$	700 গুণ

রিলেটিভিস্টিক ভর

কাজেই একটা বস্তুর বেগ কেন কখনো আলোর বেগের সমান হতে পারে না সেটা এখন বোঝা সহজ। কোনোকিছুর বেগ বাড়াতে হলে সেখানে বল প্রয়োগ করতে হয়। যারা নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র পড়েছে তারা সবাই জানে বল প্রয়োগ করলে ভরবেগের পরিবর্তন হয়। নিউটনের সূত্র যখন পড়া হয়েছে তখন সবাই জানত ভরের পরিবর্তন হয় না– তাই ধরে নেয়া হয়েছে বেগের পরিবর্তন হবে– অর্থাৎ বেগ বেড়ে যাবে।

এখন আমরা দেখতে পাচ্ছি বেগের সাথে সাথে ভরেরও পরিবর্তন হয়। অর্থাৎ কোনো বস্তুর উপর বল প্রয়োগ করলে তার ভরবেগের পরিবর্তন হয় দুভাবে, ভরের পরিবর্তন হয়ে এবং বেগের পরিবর্তন হয়ে। বেগ যখন কম তখন ভরের পরিবর্তন এত কম যে সেটাকে বিবেচনার মাঝে আনার কোনো প্রয়োজন নেই। যখন বেগ বেড়ে আলোর বেগের কাছাকাছি চলে আসে তখন সেটাকে বিবেচনার মাঝে আনতেই হবে। তাই কেউ যদি বল প্রয়োগ করে করে বেগ বাড়াতে বাড়াতে আলোর বেগের কাছাকাছি আসার চেষ্টা করে সে দেখবে বেগ না বেড়ে ভর বেড়ে যাচ্ছে! আমরা দেখতেই পাচ্ছি যদি বেগ কখনো আলোর বেগের সমান হয়ে যায় তা হলে ভরকে অসীম হয়ে যেতে হবে। সেটা তো আর সম্ভব নয়, তাই বেগ আসলে কখনোই আলোর বেগের সমান হতে পারে না।

$E = mc^2$ কেমন করে পাই

পৃথিবীর সবচেয়ে বিখ্যাত সূত্র কোনটি যদি কাউকে জিজ্ঞেস করা হয় তা হলে নিঃসন্দেহে তার উত্তর হবে $E = mc^2$ যেখানে বলা হয়েছে বস্তুর ভর আর শক্তি একই কথা। কোনো বস্তুকে যদি শক্তিতে রূপান্তরিত করা হয় তা হলে তার পরিমাণ হবে বিশাল, ভরের সাথে আলোর গতির বর্গের গুণফলের সমান। বিষয়টা যে শুধু একটা কাগজে কলমের সূত্র তা নয়, ভরকে শক্তিতে রূপান্তর করে নিউক্লিয়ার বোমা তৈরি হয়েছে। দ্বিতীয় মহাযুদ্ধের সময় সেই নিউক্লিয়ার বোমা জাপানের হিরোশিমা এবং নাগাসাকিতে ব্যবহার করে মুহূর্তের মাঝে প্রায় লক্ষ মানুষকে হত্যা করা হয়েছিল।

যাই হোক আমরা থিওরি অফ রিলেটিভিটির প্রত্যেকটা সূত্র বের করেছি। কাজেই $E = mc^2$ এই সূত্রটা যদি বের না করি তা হলে কেমন হবে? তবে সমস্যা হচ্ছে খানিকটা ক্যালকুলাস ছাড়া এটা সঠিক ভাবে বের করা যায় না, কিন্তু আমরা ঠিক করেছি কোনো ক্যালকুলাস ছাড়াই আমরা পুরো বইটা লিখব। তাই আগেই বলে রাখছি আমরা যেভাবে $E = mc^2$ বের করব সেই পদ্ধতিটা নিয়ে

কেউ কেউ আপত্তি করতে পারে। খাঁটি পদার্থবিজ্ঞানীরা এভাবে সূত্রটা বের করতে দেখলে একটু বিরক্ত হতে পারেন কিন্তু তবুও আমরা চেষ্টা করে দেখি।

মনে করি একটা বস্তু একেবারে আলোর বেগের কাছাকাছি বেগে ছুটে যাচ্ছে। একেবারেই আলোর বেগের কাছাকাছি পৌঁছে গেছে যে কারণে তার ওপর বল প্রয়োগ করলে বেগটা আর বাড়তে পারে না, ভরটা আরেকটু বেড়ে যায়। এরকম অবস্থায় আমরা যদি তার ওপর t সময় জুড়ে F বল প্রয়োগ করি তা হলে কী হবে?

পদার্থ বিজ্ঞানের প্রচলিত সূত্র অনুযায়ী কোনো বস্তুও উপর বল প্রয়োগ করা হলে তার গতি বাড়ে কাজেই তার গতিশক্তি বাড়তে থাকে। বস্তুটার গতি যদি হয় v তাহলে তার প্রতি সেকেন্ডে শক্তি বেড়ে যায় Fv. যার অর্থ t সময় জুড়ে যদি বল প্রয়োগ করা হয় তাহলে তার বেড়ে যাওয়া শক্তি ΔE হবে:

$$\Delta E = Fvt$$

আমরা আগেই বলেছি আমাদের এই বস্তুটা একেবারে আলোর বেগের কাছাকাছি যাচ্ছে কাজেই আমরা v এর জায়গায় c লিখতে পারি, অর্থাত:

$$\Delta E = Fct$$

আমরা সবাই জানি F বা বল হচ্ছে বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার। আমরা যে উদাহরণটা নিয়েছি সেখানে বস্তুটা আসলে একেবারে আলোর বেগের কাছাকাছি যাচ্ছে কাজেই তার বেগ আর বাড়তে পারবে না, অর্থাৎ তার ভরবেগের পরিবর্তন আসলে ভরের পরিবর্তন Δm. অর্থাৎ ভরবেগের পরিবর্তনের হার বা প্রযুক্ত বা বল F হচ্ছে:

$$F = \frac{(\Delta mc)}{t}$$

এখন শক্তির সূত্রটাতে যদি F এর মান বসাই তা হলে পাই

$$\Delta E = \frac{(\Delta mc)}{t} ct$$

কাজেই

$$\Delta E = \Delta mc^2$$

অর্থাত শক্তির পরিবতনটুকু হচ্ছে ভরের পরিবর্তন এর সাথে c^2-এর গুনফল, কাজেই পুরো শক্তি হচ্ছে

$$E = mc^2$$

আমরা এটা বের করেছি খুব সহজ নিয়মে, পদার্থবিজ্ঞানীরা ইচ্ছে করলে আমাদের কোনো কোনো যুক্তিকে প্রশ্ন করতে পারেন। আমরা আগেই বলেছি এটা আরো নিখুঁতভাবে বের করা সম্ভব কিন্তু তার জন্যে একটু ক্যালকুলাস দরকার। এই বইটিতে আমি কোনো ক্যালকুলাস ব্যবহার করতে চাই না। কাজেই আমরা দেখতে পাচ্ছি $E = mc^2$

m এর জায়গায় আপেক্ষিক ভর লেখা হলে সেটি হবে

$$E = \frac{moc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

থিওরি অফ রিলেটিভিটি বা আপেক্ষিক সূত্রের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ সূত্রের মাঝে এটি হচ্ছে একটি। যদি v -এর মান কম হয় তা হলে আমরা লিখতে পারি:

$$E = m_0 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$E \cong m_0 c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

$$E \cong m_0 c^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

এই সূত্রটার মাঝে আমাদের পরিচিত গতিশক্তি $\frac{1}{2}mv^2$ রয়েছে। যদি গতিবেগ $v = 0$ হয় তা হলে কিন্তু শক্তির মান শূন্য হয়ে যায় না, সেটা হয়:

$$E \cong m_0 c^2$$

এই শক্তিটাকে বস্তুর স্থির শক্তি বা Rest Energy বলে। এই সূত্রটাই পদার্থবিজ্ঞানের জগতে একটা যুগান্তকারী পরিবর্তনের সূচনা করে।

কেউ কেউ আপত্তি করতে পারে। খাঁটি পদার্থবিজ্ঞানীরা এভাবে সূত্রটা বের করতে দেখলে একটু বিরক্ত হতে পারেন কিন্তু তবুও আমরা চেষ্টা করে দেখি।

মনে করি একটা বস্তু একেবারে আলোর বেগের কাছাকাছি বেগে ছুটে যাচ্ছে। একেবারেই আলোর বেগের কাছাকাছি পৌঁছে গেছে যে কারণে তার ওপর বল প্রয়োগ করলে বেগটা আর বাড়তে পারে না, ভরটা আরেকটু বেড়ে যায়। এরকম অবস্থায় আমরা যদি তার ওপর t সময় জুড়ে F বল প্রয়োগ করি তা হলে কী হবে?

পদার্থ বিজ্ঞানের প্রচলিত সূত্র অনুযায়ী কোনো বস্তুও উপর বল প্রয়োগ করা হলে তার গতি বাড়ে কাজেই তার গতিশক্তি বাড়তে থাকে। বস্তুটার গতি যদি হয় v তাহলে তার প্রতি সেকেন্ডে শক্তি বেড়ে যায় Fv. যার অর্থ t সময় জুড়ে যদি বল প্রয়োগ করা হয় তাহলে তার বেড়ে যাওয়া শক্তি ΔE হবেঃ

$$\Delta E = Fvt$$

আমরা আগেই বলেছি আমাদের এই বস্তুটা একেবারে আলোর বেগের কাছাকাছি যাচ্ছে কাজেই আমরা v এর জায়গায় c লিখতে পারি, অর্থাতঃ

$$\Delta E = Fct$$

আমরা সবাই জানি F বা বল হচ্ছে বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার। আমরা যে উদাহরণটা নিয়েছি সেখানে বস্তুটা আসলে একেবারে আলোর বেগের কাছাকাছি যাচ্ছে কাজেই তার বেগ আর বাড়তে পারবে না, অর্থাৎ তার ভরবেগের পরিবর্তন আসলে ভরের পরিবর্তন Δm. অর্থাৎ ভরবেগের পরিবর্তনের হার বা প্রযুক্ত বা বল F হচ্ছেঃ

$$F = \frac{(\Delta mc)}{t}$$

এখন শক্তির সূত্রটাতে যদি F এর মান বসাই তা হলে পাই

$$\Delta E = \frac{(\Delta mc)}{t} ct$$

কাজেই

$$\Delta E = \Delta mc^2$$

অর্থাত শক্তির পরিবতনটুকু হচ্ছে ভরের পরিবর্তন এর সাথে c^2-এর গুনফল, কাজেই পুরো শক্তি হচ্ছে

$$E = mc^2$$

আমরা এটা বের করেছি খুব সহজ নিয়মে, পদার্থবিজ্ঞানীরা ইচ্ছে করলে আমাদের কোনো কোনো যুক্তিকে প্রশ্ন করতে পারেন। আমরা আগেই বলেছি এটা আরো নিখুঁতভাবে বের করা সম্ভব কিন্তু তার জন্যে একটু ক্যালকুলাস দরকার। এই বইটিতে আমি কোনো ক্যালকুলাস ব্যবহার করতে চাই না। কাজেই আমরা দেখতে পাচ্ছি $E = mc^2$

m এর জায়গায় আপেক্ষিক ভর লেখা হলে সেটি হবে

$$E = \frac{moc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

থিওরি অফ রিলেটিভিটি বা আপেক্ষিক সূত্রের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ সূত্রের মাঝে এটি হচ্ছে একটি। যদি v -এর মান কম হয় তা হলে আমরা লিখতে পারিঃ

$$E = m_0 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$E \cong m_0 c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

$$E \cong m_0 c^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

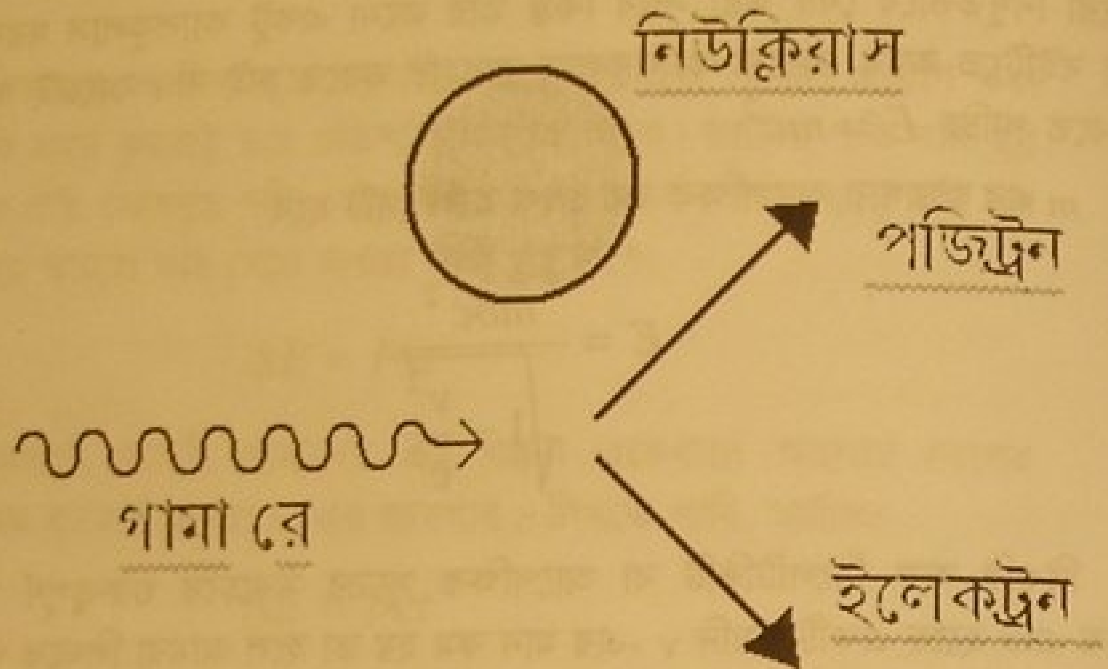
এই সূত্রটার মাঝে আমাদের পরিচিত গতিশক্তি $\frac{1}{2}mv^2$ রয়েছে। যদি গতিবেগ $v = 0$ হয় তা হলে কিন্তু শক্তির মান শূন্য হয়ে যায় না, সেটা হয়ঃ

$$E \cong m_0 c^2$$

এই শক্তিটাকে বস্তুর স্থির শক্তি বা Rest Energy বলে। এই সূত্রটাই পদার্থবিজ্ঞানের জগতে একটা যুগান্তকারী পরিবর্তনের সূচনা করে।

ভর এবং শক্তির মিলিত নিত্যতার সূত্র

এক সময় ধারণা করা হতো শক্তির একটি নিত্যতার সূত্র রয়েছে, অর্থাৎ শক্তির ধ্বংসও নেই সৃষ্টিও নেই। একরকম শক্তি শুধু অন্যরকম শক্তিতে রূপান্তর করা যায়। স্থিতিশক্তিকে গতিশক্তিতে রূপান্তর করা যায়, গতিশক্তিকে তাপশক্তিতে রূপান্তর করা যায়, তাপশক্তিকে আলো শক্তিতে রূপান্তর করা যায় ইত্যাদি।



10 নং ছবি: পেয়ার প্রোডাকশনে শক্তিশালী একটা গামা রে একটি ইলেকট্রন এবং একটা পজিট্রনে পাল্টে যায়। ভরবেগের নিত্যতার সূত্রকে ঠিক রাখার জন্যে কাছাকাছি একটা নিউক্লিয়াস বা ভর থাকতে হয়।

ঠিক সেরকম ধারণা করা হতো বস্তুর ভরের একটি নিত্যতার সূত্র রয়েছে। ভরের সৃষ্টি নেই এবং ধ্বংস নেই। আইনস্টাইনের এই অবিনশ্বর সূত্র দিয়ে হঠাৎ করে ভর এবং শক্তিকে এক জায়গায় নিয়ে আসা হলো। পৃথিবীর বিজ্ঞানীরা সবিস্ময়ে আবিষ্কার করলেন ভর থেকে শক্তি তৈরি করা যায় আবার শক্তি থেকেও ভর তৈরি করা যায়। নূতন একটা নিত্যতার সূত্র তৈরি হলো সেটা হচ্ছে ভর এবং শক্তির মিলিত নিত্যতার সূত্র।

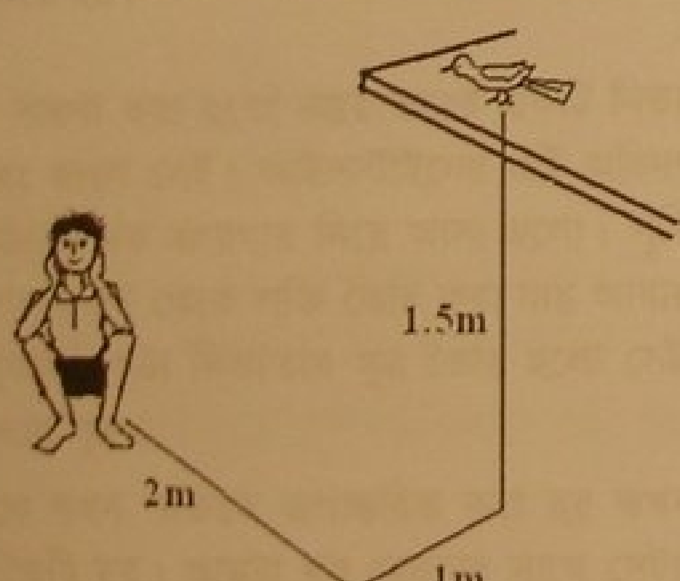
ভর থেকে যখন শক্তিতে রূপান্তরিত করা হয় তখন অত্যন্ত ক্ষুদ্র ভর থেকে বিশাল শক্তি তৈরি হয়। আমরা খুব বেদনার সাথে সেটা দেখেছি হিরোশিমা এবং নাগাসাকিতে, যেখানে নিউক্লিয়াস বোমাতে ভরকে শক্তিতে রূপান্তর করে মুহূর্তের মাঝে পুরো শহরকে ধ্বংস করে দেয়া হয়েছিল, লক্ষ লক্ষ মানুষ তাদের প্রাণ

হারিয়েছিল। আবার শক্তি থেকে ভর তৈরি হওয়ার উদাহরণ পদার্থবিজ্ঞানীরা অহরহই দেখতে পান। সবচেয়ে সহজ উদাহরণ হচ্ছে পেয়ার প্র্যাডাকশন (10 নং ছবি) যেখানে শক্তিশালী একটা গামা রে একটি ইলেকট্রন এবং একটা পজিট্রনে পাল্টে যায়, শক্তিটুকু থেকে দুটি কণা তৈরি হয় যার ভর রয়েছে। (মজার ব্যাপার হচ্ছে পেয়ার প্রোডাকশনের জন্যে কাছাকাছি একটা নিউক্লিয়াস বা ভর থাকতে হয়- গামা রে যে ভরবেগ নিয়ে আসে সেটাকে গ্রহণ করে ভরবেগের নিত্যতার সূত্রকে ঠিক রাখার জন্যে।)

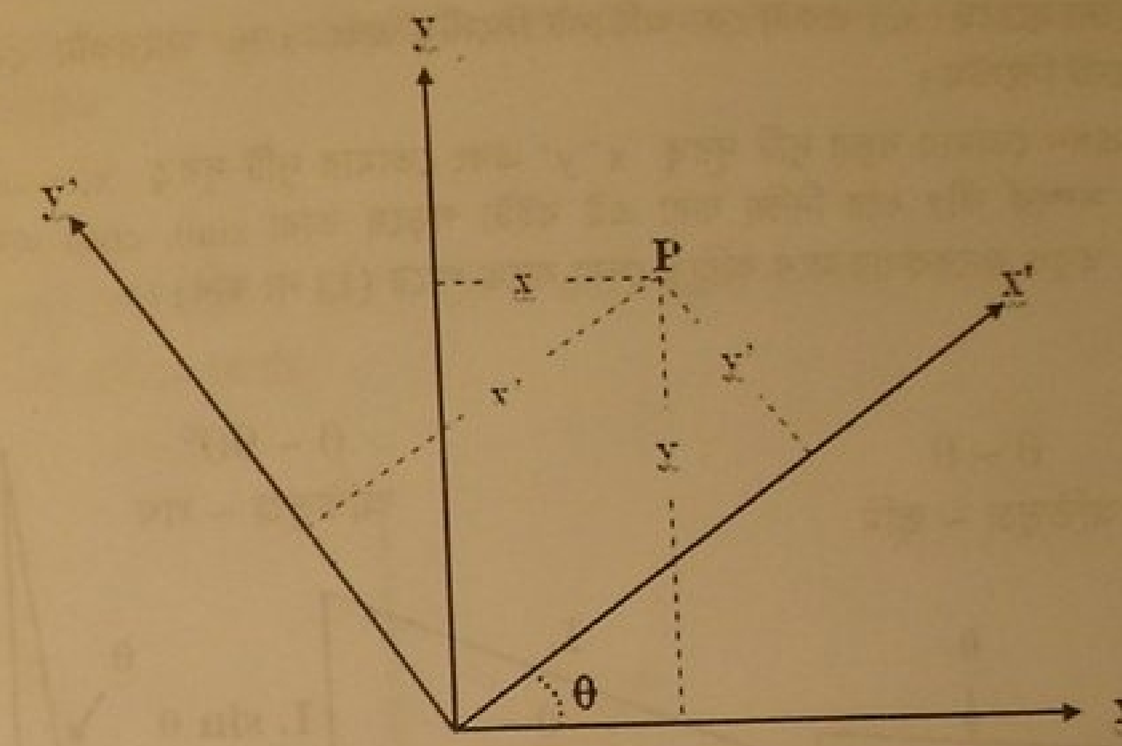
স্থানাংকের রূপান্তর

স্থানাংক

ধরা যাক তুমি তোমার বারান্দায় বসে আছ, তখন দেখলে একটা পাখি উড়ে এসে তোমার কার্নিশে বসেছে। তোমাকে যদি জিজ্ঞেস করি, "পাখীটা কোথায়?" গণিতের ভাষায় তোমার জন্যে বলা সবচেয়ে সহজ হবে, "সোজা সামনের দিকে দুই মিটার তারপর বামদিকে এক মিটার, সেখান থেকে ওপরের দিকে দেড় মিটার।" (11 নং ছবি) তুমি একটু চিন্তা করলেই দেখবে আসলে তিনটি দূরত্বের দৈর্ঘ্য বলে দিলেই আমরা আমাদের সাপেক্ষে যে কোনো বস্তুর অবস্থানটা পুরোপুরি নির্দিষ্ট করে ফেলতে পারব। আমাদের পরিচিত জগৎটা ত্রিমাত্রিক তাই সবসময়েই তিনটি দূরত্বের (স্থানাংক)দরকার হয়।



11 নং ছবিঃ সামনে 2.0 মিটার গিয়ে, বামদিকে 1.0 মিটার গিয়ে, উপরে 1.5 মিটার গেলেই পাখীটা পাওয়া যাবে।



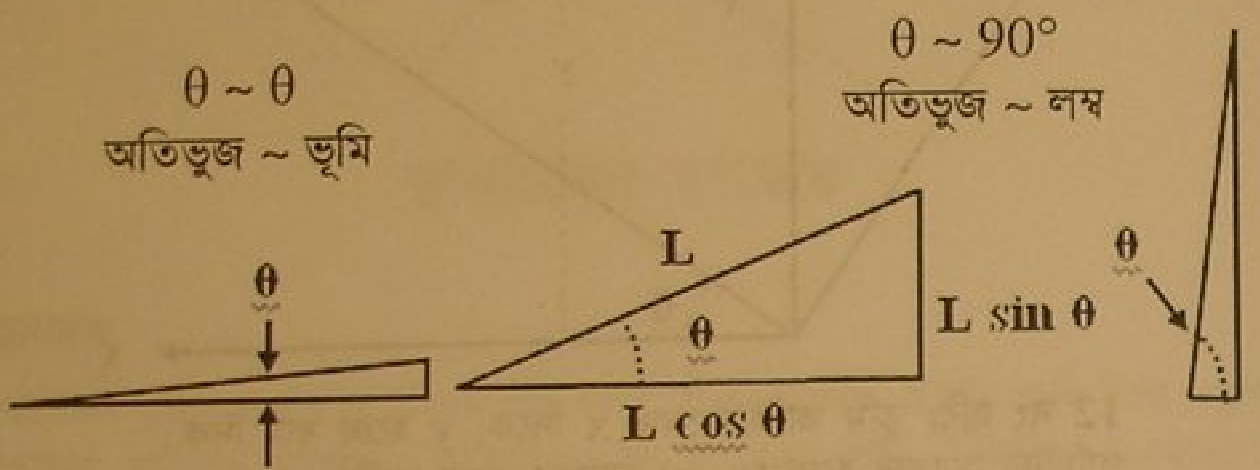
12 নং ছবিঃ তুমি তাকিয়ে আছ x দিকে, y হচ্ছে বাম দিক। পাখিটার অবস্থান হচ্ছে (x ,y) তোমার বন্ধুরা তাকিয়ে আছে x´ দিকে তার বাম দিক হচ্ছে y´ তোমার বন্ধুর কাছে পাখীটার অবস্থানা (x´, y´)

ব্যাপারটা বোঝার জন্যে আমরা আপাতত উচ্চতাটা নিয়ে মাথা না ঘামালাম, তাহলে হিসেবপত্র একটু সহজ হবে। কেউ যদি উচ্চতাটা আনতেই চায় সেটা ফিরিয়ে আনা এমন কিছু কঠিন নয়। আপাতত আমরা দুটো মাত্রা নিয়েই মাথা ঘামাই- (অর্থাৎ ধরে নিই, পাখীটা বাসার কার্নিশে না বসে, বসেছে বাসার উঠোনে।) তুমি যেখানে বসে আছে তার তুলনায় পাখিটাকে নির্দিষ্ট করতে হলে এখন শুধু দুটি দৈর্ঘ্যকে নির্দিষ্ট করতে হবে, তোমার থেকে কতটুকু সামনে এবং সেখান থেকে কতটুকু বামে। (পাখিটা যদি সামনের দিকে না থেকে পিছনের দিকে থাকে তা হলে সামনের দৈর্ঘ্যটা হবে নিগেটিভ, বাম দিকে না থেকে ডান দিকে থাকে তা হলে বাম দিকের দৈর্ঘ্যটা হবে নিগেটিভ, কিন্তু নূতন কোনো দৈর্ঘ্য নিয়ে মাথা ঘামাতে হবে না এই দুটো দৈর্ঘ্যই যথেষ্ট)।

এখন ধরা যাক তোমার বন্ধু ঠিক তোমার পাশে এসে বসেছে, সেও উঠোনে বসা পাখিটাকে দেখেছে। তোমরা দুজন যদি একই দিকে তাকিয়ে থাক তা হলে দুজনেই বলবে পাখীটা x মিটার সামনে এবং y মিটার বামে। কিন্তু তোমার বন্ধু যদি একটু ঘুরে বসে? তাহলে সে কী বলবে? সে অবশ্যই ভিন্ন কিছু বলবে, সে হয়তো বলবে x´ মিটার সামনে এবং y´ মিটার বামে। ব্যাপারটা 12 নং ছবিতে

দেখানো হয়েছে। $x{:}y$ একটা কো-অর্ডিনেট সিস্টেম এবং $x'{:}y'$ আরেকটা কো-অর্ডিনেট সিস্টেম।

এখন তোমার বন্ধুর দুটি দূরত্ব x' y' এবং তোমার দুটি দূরত্ব x, y -এর মাঝে সম্পর্ক কী? ধরে নিচ্ছি যারা এই বইটা পড়ছে তারা $\sin\theta$, $\cos\theta$ এসব জানে, তবুও আরেকবার মনে করিয়ে দেয়া যাতে পারে (13 নং ছবি)।



13 নং ছবিঃ সমকোণী ত্রিভুজের ভূমি/অতিভুজ = $\cos\theta$ লম্ব/অতিভুজ = $\sin\theta$

একটা সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য L, তখন ভূমিকে বলা হয় $L\cos\theta$ আর লম্বকে বলা হয় $L\,\mathrm{Sin}\theta$, θ যত ছোট হয় ভূমির দৈর্ঘ্য ততই অতিভূজের দৈর্ঘ্যের কাছাকাছি হয়ে যায়। আবার θ যত বড় হতে থাকে লম্বের দৈর্ঘ্য ততই অতিভুজের দৈর্ঘ্যের কাছাকাছি হতে থাকে।

এবারে আমরা শুরু করি। তুমি এবং তোমার বন্ধু দুজনেরই বসেছ O বিন্দুতে, পাখিটি বসেছে P বিন্দুতে। তোমার কো-অর্ডিনেট সিস্টেম হচ্ছে x ও y. তুমি x এবং y এই দুটি দুরত্ব দিয়ে পাখীর অবস্থানটা নির্দিষ্ট করছ। তোমার বন্ধু নির্দিষ্ট করছে x' এবং y' দিয়ে। আমাদের উদ্দেশ্য (x',y') এবং (x, y) মাঝে একটা সম্পর্ক খুঁজে বের করা।

14 নং ছবিতে দেখা যাচ্ছে P বিন্দুটি O বিন্দুর সাপেক্ষে দুটি দৈর্ঘ্য দিয়ে নির্দিষ্ট করা হয়েছে, সেই দুটি দৈর্ঘ্য হচ্ছেঃ

$x = OC$

$y = CP$

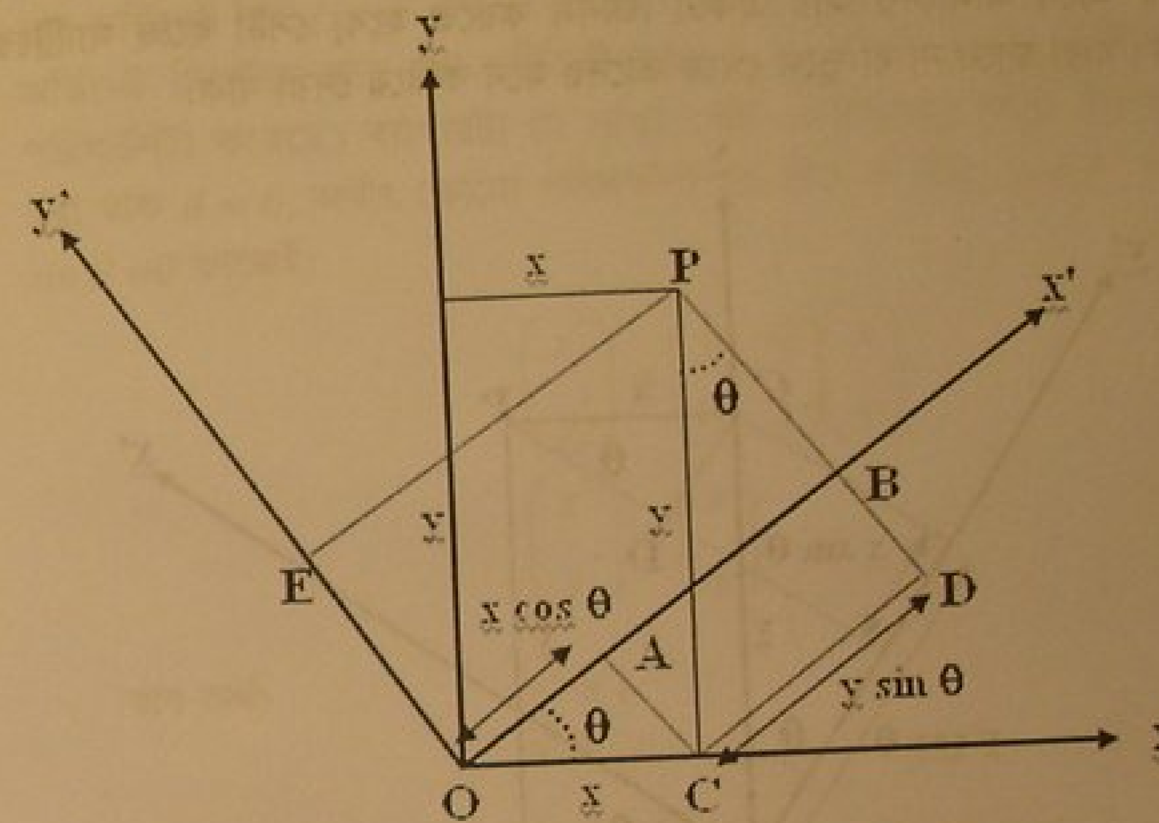
P বিন্দুটি $x'{:}y'$ কো অর্ডিনেট সিস্টেমে দুটি দূরত্ব দিয়ে নির্দিষ্ট করা হয়েছে, সেগুলো হচ্ছে

$x' = OB$

$y' = OE$

আমরা চেষ্টা করব x' এবং y' কে x এবং y (এবং θ) দিয়ে লিখতে।

14 নং ছবিতে দেখছি



14 নং ছবিঃ x' কে x এবং y (এবং θ) দিয়ে লেখা

$$x' = OB = OA + AB$$
$$OA' = OC\ \cos\theta = x\cos\theta$$
$$AB = CD = PC\sin\theta = y\sin\theta$$

অর্থাৎ, $x' = x\cos\theta + y\sin\theta$

একই ভাবে 15 নং ছবিতে আমরা দেখছিঃ

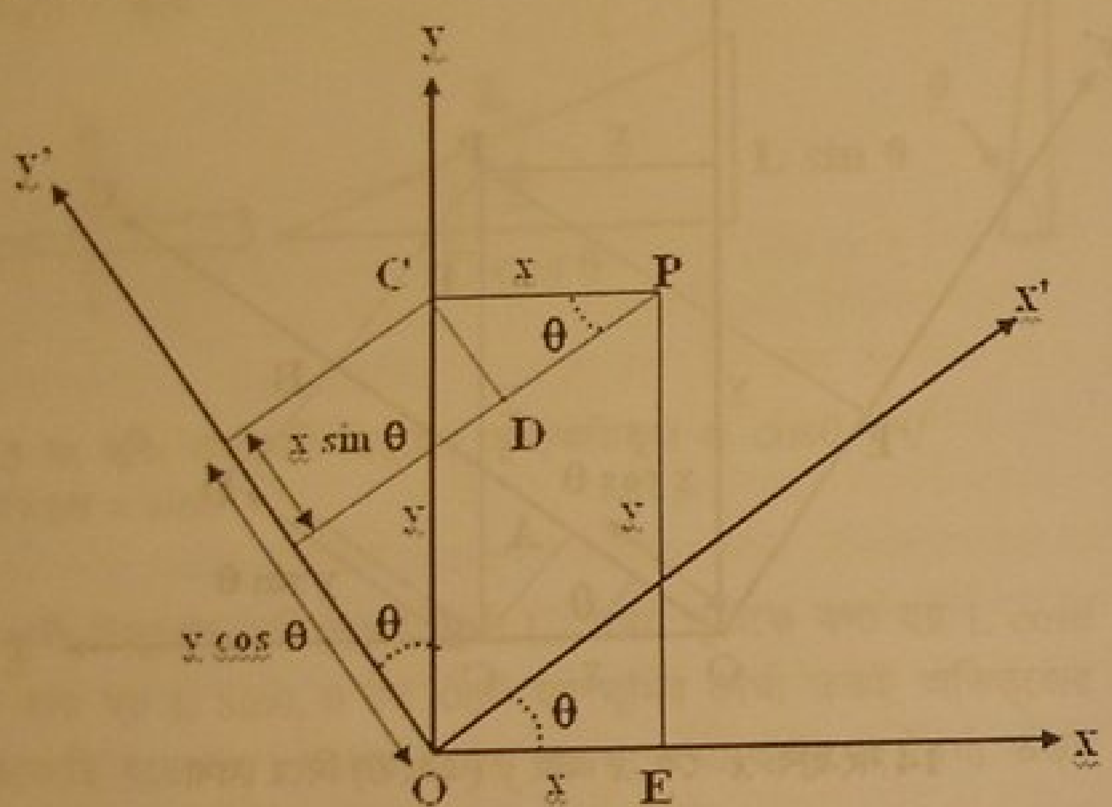
$$y' = OB = OA - AB$$
$$OA = OC\ \mathrm{Cos}\,\theta = y\cos\theta$$
$$AB = CD = CP\sin\theta = x\sin\theta$$

অর্থাৎ, $y' = y\cos\theta + x\sin\theta$

আমরা যেটা বের করার কথা সেটাবের করে ফেলেছি, একটু গুছিয়ে লিখি:

$$x' = x \cos\theta + y \sin\theta$$
$$y' = -x \sin\theta + y \cos\theta$$

আমি অনুমান করছি সবাই নিশ্চয়ই একটু অধৈর্য্য হয়ে ভাবছে থিওরি অফ রিলেটিভিটি করতে এসে হঠাৎ করে আমি কো অর্ডিনেট জ্যামিতি শুরু করে দিয়েছি কেন? একটু ধৈর্য্য ধরলেই সবাই ব্যাপারটা বুঝে ফেলবে, কিন্তু সেটা করার আগে আমাদের আর একটা জিনিস করতে হবে, সেটা হচ্ছে ম্যাট্রিক্সের গুণন। যারা জানে না বা ভুলে গেছে তাদের মনে করিয়ে দেয়া যাক:



15 নং ছবি: y'কে x এবং y (এবং θ) দিয়ে লেখা

ধরা যাক $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

তাহলে $$Ax = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

যার অর্থ আমরা একটু আগে যখন x' এবং y' কে x এবং y দিয়ে লিখেছি সেটাকে শর্ট কাট করে ম্যাট্রিক্স দিয়ে লিখতে পারি। সেটা হবে এরকম:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

আমরা এই ম্যাট্রিক্সের দিকে তাকিয়ে বলতে পারি গোড়াতে P বিন্দুর দুটি কো অর্ডিনেট ছিল (x, y) এখন সেটাকে θ কোণে ঘুরিয়ে নেয়া হয়েছে, নূতন কো অর্ডিনেট সিস্টেমে তার কো-অর্ডিনেট হচ্ছে (x', y') মাঝখানের ম্যাট্রিক্সটা সেই পরিবর্তনটা করেছে। ব্যাপারটা যে সত্যি সেটা বোঝার খুব সহজ উপায় আছে। ধরা যাক $\theta = 0$, অর্থাৎ কোনো পরিবর্তনই হয় নি। তা হলে $\cos\theta = 1$ এবং $\sin\theta = 0$ কাজেই:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

যার অর্থ: $$x' = x$$ $$y' = y$$

ঠিক আমরা যেটা ভেবেছিলাম।

আমাদের এই পুরো পরিশ্রমটুকু করার একটাই উদ্দেশ্য–আমরা তোমাদের বোঝাতে চাই, একটা কো অর্ডিনেট সিস্টেমের সাপেক্ষে অন্য একটা কো অর্ডিনেট সিস্টেমকে একটা নির্দিষ্ট কোণে ঘোরানো যায়। কত কোণে ঘোরানো হয়েছে সেটা যদি আমরা জানি আমরা চট করে ঘোরানোর পর তার কো অর্ডিনেট কত হবে সেটা বের করে ফেলতে পারব।

আমরা যে পুরো ব্যাপারটি ঠিক করে করেছি কোথাও ভুল হয় নি, সেটা আরো একভাবে দেখানো যায়।

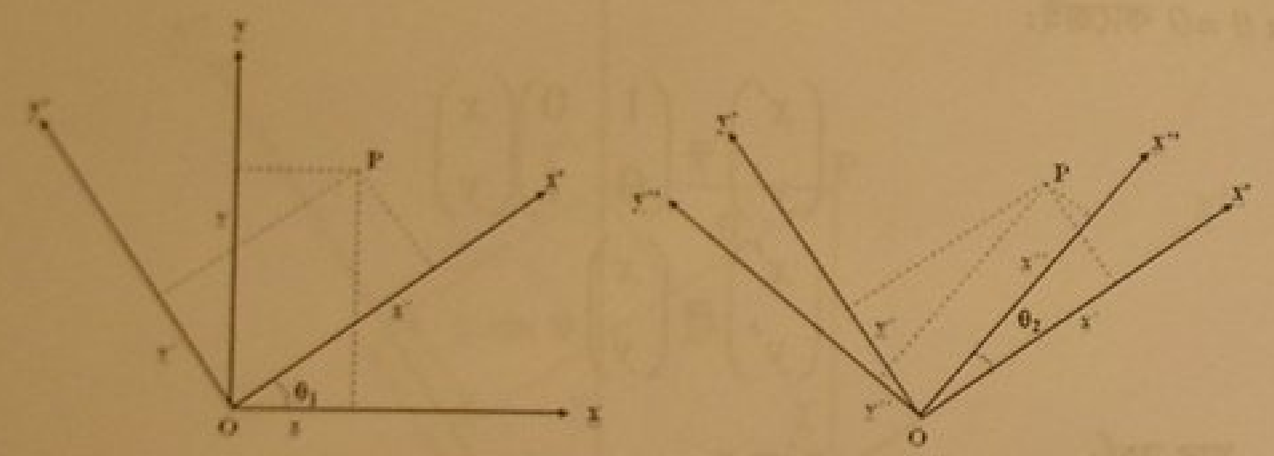
ধরা যাক গোড়াতে কো অর্ডিনেট ছিল (x, y) . এবারে কো অর্ডিনেট সিস্টমটাকে θ_1 কোণ ঘোরানো হলো যার কারণে আমরা পেলাম (x', y') এবারে (x', y') এর সাপেক্ষে θ_2 কোণ ঘোরানো হলো (16 নং ছবি), যার কারণে আমরা পেলাম (x'', y'')

অর্থাৎ
$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

এবং
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

প্রথমটিতে দ্বিতীয়টি বসিয়ে লিখতে পারি:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



16 নং ছবি: x:y কো অর্ডিনেট সিস্টেমটাকে θ_1 কোণ ঘোরানো হলো যার কারণে আমরা পেলাম (x´, y´) এবারে x´:y´ কো অর্ডিনেট সিস্টেমকে এর সাপেক্ষে θ_2 কোণ ঘোরানো হলো, যার কারণে আমরা পেলাম (x˝, y˝)

সেটাকে লেখার জন্যে আমরা ম্যাট্রিক্সের গুণ একবার ঝালাই করে নিই:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aw+by & ax+bz \\ cw+dy & cx+dz \end{pmatrix}$$

কাজেই আমাদের এখানে হবে:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 \\ -\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

সেটাকে খুব সহজেই লেখা যায়:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) \\ -\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

এটি বলছে (x'', y'') হচ্ছে (x, y) কে $(\theta_1+\theta_2)$ কোনে ঘোরানোর সমান। প্রথমবার θ_1, দ্বিতীয়বার আরেকটু θ_2 ঘোরানো হলে মোট ঘোরানো হয় $\theta_1 + \theta_2$ এবং আমরা সেটাই পেয়েছি। ঠিক যেরকম আমরা আশা করেছিলাম।

মনে রাখতে হবে আমরা ব্যাপারটা সহজ করার জন্যে শুধু দুটি মাত্রা ব্যবহার করেছি। পুরো ত্রিমাত্রিক জগতে যদি ঘোরাতে চাই তা হলে সবগুলো ম্যাট্রিক্স 2×1 এবং 2×2-এর বদলে হবে 3×1 কিংবা 3×3 ম্যাট্রিক্স।

আমরা যেটা করতে চাইছি সেটা করার জন্যে আমাদের আর একটা বিষয় দেখাতে হবে। ধরা যাক আমরা একটা লোহার রডের দৈর্ঘ্য মাপতে চাইছি। তার এক মাথা রেখেছি O বিন্দুতে, অন্য মাথা রেয়েছে P বিন্দুতে। তা হলে তার দৈর্ঘ্য হবে:

$$OP = x^2 + y^2$$

এখন আমরা যদি আমাদেও কো অর্ডিনেট সিস্টেম θ কোনে ঘুরিয়ে ফেলি তাহলে সেই কো অর্ডিনেট সিস্টেমে লোহার রডের দৈর্ঘ্য হবে:

$$\begin{aligned} OP &= x'^2 + y'^2 \\ &= (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 + (-x\sin\theta + y\cos\theta)^2 \\ &= x^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta + 2xy\cos\theta\sin\theta + x^2\sin^2\theta + y^2\cos^2\theta \\ &\qquad - 2xy\sin\theta\cos\theta \\ &= x^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + y^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

অর্থাৎ আমরা যে কো অর্ডিনেট সিস্টেমেই যাই না কেন, সব সময়েই লোহার রডের দৈর্ঘ্যটা একই থাকবে। তার কোনো পরিবর্তন হবে না। হওয়ার কথা নয়– যদি হতো তা হলে বড় সমস্যা হয়ে যেত!

চতুর্মাত্রিক জগৎ

এবারে আমরা যেটা দেখানোর জন্যে এত পরিশ্রম করেছি সেটা করে ফেলি– লরেন্টজের সূত্রগুলো লিখে ফেলি–কাজটা সহজ করার জন্যে প্রথমে লিখি:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

তা হলে লরেন্টেজের পরিবর্তন হচ্ছে:

$$x' = \gamma x - \gamma\beta ct$$

$$t' = \gamma t - \frac{\gamma\beta x}{c}$$

সবাই নিশ্চয়ই এবারে অনুমান করে ফেলেছে আমি কী করতে চাইছি। একটা কো অর্ডিনেট সিস্টেমের সাপেক্ষে আমরা যেরকম অন্য একটা কো অর্ডিনেট সিস্টেমকে ঘুরিয়ে দৈর্ঘ্যগুলোর ভেতরে সম্পর্ক বের করেছিলাম এখানেও তাই করতে চাইছি।

আমি জানি কেউ কেউ আপত্তি করার জন্যে প্রস্তুত হচ্ছে–আগে ছিল একটা বিন্দুর দুটি দৈর্ঘ্য, এখন হচ্ছে অবস্থান এবং সময়! কিন্তু একটু ধৈর্য ধরে দেখা যাক আসলেই কাজটি করা যায় কি না। আমরা যদি এভাবে লিখি:

$$x' = \gamma x + (i\gamma\beta)(ict)$$
$$ict' = -i\gamma\beta x + \gamma(ict)$$

যেখানে $i = \sqrt{-1}$ সেই বিখ্যাত imaginary সংখ্যা।

তা হলে ম্যাট্রিক্স ব্যবহার করে লেখা যায়:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & i\gamma\beta \\ -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix}$$

এটা কি হুবহু একটু আগের করা আমাদের কো অর্ডিনেট সিস্টেম ঘোরানোর মতো নয়? প্রথমে ছিল x এবং ict, চলমান রেফারেন্সে যাওয়া হচ্ছে স্পেস টাইমে একটু ঘুরিয়ে দেয়ার মতো। তার মানে আমরা যে সব সময় ত্রিমাত্রিক জগৎ বলে এসেছি সেটি পরিপূর্ণ নয়, তার সাথে সময়টাকে যোগ করে দেয়া যেতে পারে। যেহেতু দৈর্ঘ্য প্রস্থ আর উচ্চতা এই তিনটা মাত্রা আছে– সময়টাকে যুক্ত করতে হলে সেটাকে নিশ্চয়ই বলতে হবে চতুর্থ মাত্রা। কাজেই আমরা বলতে পারি

আমাদের চারপাশের জগৎ আসলে ত্রিমাত্রিক নয় এটা–হচ্ছে চতুর্মাত্রিক এবং সময় হচ্ছে তার চতুর্থ মাত্রা। (কেউ যেন মনে না করে চার মাত্রাতেই এটাকে থেমে যেতে হবে–আরও বেশি মাত্রা যে আসবে না কেউ বলতে পারে না! স্ট্রিং থিওরিতে কমপক্ষে দশ মাত্রার প্রয়োজন- কিন্তু সেটা ভিন্ন ব্যাপার।)

লরেন্টেজ পরিবর্তনকে এভাবে ম্যাট্রিক্স দিয়ে আসলেই লিখতে পারি কি না তার জন্য একটা বড় পরীক্ষা বাকি রয়ে গেছে। আমরা যখন কো অর্ডিনেট সিস্টেম কোণে ঘুরিয়েছি তখন দেখেছি দুই কো অর্ডিনেট সিস্টেমেই কোনোকিছুর দৈর্ঘ্য সমান থাকে। যদি লরেন্টেজ রূপান্তরকে আমরা এভাবে লিখতে চাই তা হলে এখানেও সে ধরনের কিছুকে অপরিবর্তিত থাকতে হবে। আগে ছিল

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

কিন্তু সেটা গুরুত্বপূর্ণ নয়।

আসলে যদি সত্যি সত্যি দৈর্ঘ্যটাই বলতে চাই তা হলে লেখা উচিত:

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

এখানেও সেটা সত্যি হওয়া উচিত। অর্থাৎ চতুর্মাত্রিক জগতের দৈর্ঘ্যটা দু জায়গাতেই সমান হতে হবে। কিন্তু চতুর্মাত্রিক জগতে দৈর্ঘ্যটা কি? ত্রিমাত্রিক জগতে দৈর্ঘ্য ছিল দুই বিন্দুতে অবস্থানের মাঝখানের দৈর্ঘ্যটুকু। চতুর্মাত্রিক জগতে অবস্থানে সময়টাকেও রাখতে হবে, অর্থাৎ এটা হচ্ছে নূতন ধরনের অবস্থান, কোথায় আছে এবং কখন আছে এই তথ্যগুলো নিয়ে এটা তৈরি পদার্থবিজ্ঞানের ভাষায় এটাকে বলে event.

আমরা সময়ের সাথে *ic* গুণ করে *ict* তৈরী করে সেটাকে চার নম্বর মাত্রা তৈরী করেছি। এটাকে মাত্রা ধরা হলে দুটি event এর মাঝখানের দৈর্ঘ্য হচ্ছে:

$$\sqrt{x^2 + (ict)^2} = \sqrt{x^2 - (ct)^2}$$

চলমান কোনে রেফারেন্স ফ্রেমে সেই দুটি event এর দৈর্ঘ্য হবে:

$$\sqrt{x'^2 + (ict')^2} = \sqrt{x'^2 - (ct')^2}$$

কাজেই আমাদের দেখতে হবে

$$\sqrt{x'^2 - (ct')^2} = \sqrt{x^2 - (ct)^2}$$

কাজটা খুব কঠিন নয়

$$x' = \gamma x + (i\gamma\beta)(ict)$$
$$ict' = -i\gamma\beta x + \gamma(ict)$$

$$x'^2 + (ict')^2 = (\gamma x + (i\gamma\beta)(ict))^2 + (-i\gamma\beta x + \gamma(ict))^2$$
$$= \gamma^2 x^2 + \gamma^2\beta^2 c^2 t^2 - 2(\gamma x)(\gamma\beta ct) - \gamma^2\beta^2 x^2 - \gamma^2 c^2 t^2 + 2(\gamma\beta x)(\gamma ct)$$
$$= \gamma^2 x^2 - \gamma^2\beta^2 x^2 - \gamma^2 c^2 t^2 + \gamma^2\beta^2 c^2 t^2$$
$$= x^2(\gamma^2 - \gamma^2\beta^2) - c^2 t^2(\gamma^2 - \gamma^2\beta^2)$$

কিন্তু আমরা জানি $\gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = \gamma^2(1-\beta^2) = \dfrac{(1-\beta^2)}{(1-\beta^2)} = 1$

কাজেই $\quad x'^2 + (ict')^2 = x^2 - c^2t^2$

অর্থাৎ আমরা দেখতে পাচ্ছি লরেন্টজের পরিবর্তনে দুটো event এর মাঝখানের দূরত্বটুকু সব রেফারেন্স ফ্রেমেই সমান। দূরত্বেও সংকোচন হয় সময়ের প্রসারণ হয় কিন্তু $x^2 - c^2t^2$ এর কোনো পরিবর্তন হয় না।

বেগের যোগফল

সবার নিশ্চয়ই মনে আছে আমরা একটু আগে একটা কো অর্ডিনেট সিস্টেম প্রথমবার θ_1 এবং পরেরবার তার সাপেক্ষে $C\theta_2$ ঘুরিয়েছিলাম। দুটো ম্যাট্রিক্সকে গুন করে আমরা যে ম্যাট্রিক পেয়েছিলাম দেখা গেল সেটা আসলে একবার $(\theta_1 + \theta_2)$ কোণে ঘোরানো একটা কো অর্ডিনেট সিস্টেম ছাড়া আর কিছু নয়।

যখন একটা কো অর্ডিনেট সিস্টেম বা ইনারশিয়াল সিস্টেমের তুলনায় আরেকটা সিস্টেম v বেগে যায় তখন কী পরিবর্তন হয় সেটা আমরা ইতোমধ্যে দেখেছি। যদি দ্বিতীয় ইনারশিয়াল সিস্টেমের তুলনায় তৃতীয় সিস্টেমটি আরেকটা ভিন্ন বেগে সরতে থাকে তা হলে কী পরিবর্তন হয় আমরা সেই একই কায়দায় বের করে ফেলতে পারব। পুরো ব্যাপারটা হবে ম্যাট্রিক্সেও গুণন!

ধরা যাক প্রথম কো অর্ডিনেট সিস্টেমের তুলনায় দ্বিতীয় কো অর্ডিনেট সিস্টেম v বেগে যাচ্ছে। অর্থাৎ

$$\begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & i\gamma_1\beta_1 \\ -i\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix}$$

যেখানে

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}$$

$$\beta_1 = \frac{v_1}{c}$$

এবারে ধরা যাক দ্বিতীয়া কো অর্ডিনেট সিস্টেমের তুলনায় তৃতীয় কো অর্ডিনেট সিস্টেম v_2 বেগে যাচ্ছে। অর্থাৎ

$$\begin{pmatrix} x'' \\ ict'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & i\gamma_2\beta_2 \\ -i\gamma_2\beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}}$$

যেখানে

$$\beta_2 = \frac{v_2}{c}$$

এবারেও প্রথম ম্যাট্রিক্সটা দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সে ব্যবহার করে লিখতে পারিঃ

$$\begin{pmatrix} x'' \\ ict'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & i\gamma_2\beta_2 \\ -i\gamma_2\beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 & i\gamma_1\beta_1 \\ -i\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ ict'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2 & i\gamma_1\gamma_2\beta_1 + i\gamma_1\gamma_2\beta_2 \\ -i\gamma_1\gamma_2\beta_2 - i\gamma_1\gamma_2\beta_1 & \gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ ict'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) & i\gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2) \\ -i\gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2) & \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix}$$

যদি তৃতীয় কো অর্ডিনেট প্রথম কো অর্ডিনেট সিস্টেমের সাপেক্ষে v বেগে যেত অর্থাৎ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

তাহলে এই সমীকরণটা আমরা লিখতাম এভাবে:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ ict'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & i\gamma\beta \\ -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix}$$

উপরের দুটি তুলনা করে আমরা দেখছি:

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2)$$
$$\gamma\beta = \gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2)$$

দ্বিতীয় সমীকরণকে প্রথম সমীকরণ দিয়ে ভাগ করে আমরা দেখি

$$\beta = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$$

আমরা যেটা পেয়েছি সেটা সঠিক কি না পরীক্ষা করে দেখার জন্য β-এর ব্যবহার করে γ বের করতে পারি। যেহেতু

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

প্রথম $1-\beta^2$ বের করা যাক। অর্থাৎ

$$1-\beta^2 = 1-\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right)^2$$

$$1-\beta^2 = \frac{(1+\beta_1\beta_2)^2-(\beta_1+\beta_2)^2}{(1+\beta_1\beta_2)^2}$$

$$1-\beta^2 = \frac{(1+\beta_1\beta_2)^2-(\beta_1+\beta_2)^2}{(1+\beta_1\beta_2)^2}$$

$$1-\beta^2 = \frac{1+2\beta_1\beta_2+\beta_1^2\beta_2^2-\beta_1^2-2\beta_1\beta_2-\beta_2^2}{(1+\beta_1\beta_2)^2}$$

$$1-\beta^2 = \frac{1-\beta_1^2-\beta_2^2+\beta_1^2\beta_2^2}{(1+\beta_1\beta_2)^2}$$

$$1-\beta^2 = \frac{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}{(1+\beta_1\beta_2)^2}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}}$$

অর্থাৎ $\gamma = \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2)$

γ এর জন্যে এটাই আমরা আগে পেয়েছি। অর্থাৎ আসলেই

$$\beta = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$$

এটাকে লিখতে পারি $v = \dfrac{v_1+v_2}{1+\dfrac{v_1v_2}{c^2}}$

যার অর্থ v_1 এবং v_2 এই দুটি বেগের যোগফল v_1+v_2 নয় এটি হচ্ছে:

$$v = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}$$

এ কারণে যতই চেষ্টা করা যাক কখনোই বেগ আলোর বেগ থেকে বেশি হবে না। ধরা যাক $v_1 = \frac{3c}{4}$ এবং $v_2 = \frac{3c}{4}$, সাধারণ হিসেবে দুটির যোগফল হবার কথা $v_1 + v_2 = \frac{3c}{2}$ কিন্তু আপেক্ষিক সূত্র বলছে:

$$v = \frac{3c/4 + 3c/4}{1+(3c/4)(3c/4)} = \frac{24}{25}c$$

যেটা আলোর বেগ c থেকে কম।

$v_1 = v$ এবং $v_2 = c$ ধরা হলে আমরা পাব: $v = \frac{v+c}{1+\frac{v}{c}}$

সবার মনে আছে কি আমরা একেবারে শুরুতে শুধুমাত্র আইনস্টাইনের সূত্র ব্যবহার করে এটি বের করে ফেলেছিলাম?

চেরেনকভ রেডিয়েশান

আপেক্ষিক সূত্র বা থিওরি অফ রিলেটিভিটি শেখার সময় আমরা বারবার একটা কথা বলেছি, সেটা হচ্ছে কোনোকিছুর গতিবেগ আলোর গতিবেগ থেকে বেশি হতে পারবে না। কিন্তু মজার ব্যাপার হচ্ছে আলো থেকে দ্রুতগতিতে ইলেকট্রন ছুটে যেতে পারে কিন্তু তাতে থিওরি অফ রিলেটিভিটির নিয়ম ভঙ্গ হয় না, সেটা কীভাবে সম্ভব?

আমি জানি সবাই নিশ্চয়ই খুব দুশ্চিন্তার মাঝে পড়ে গেছে, বারবার জোর গলায় বলেছি কোনোকিছুই আলোর চাইতে দ্রুতগতিতে যেতে পারবে না, আবার বলছি ইলেকট্রন নাকি থিওরি অফ রিলেটিভিটি মেনেই আলোর চাইতে দ্রুতগতিতে যেতে পারবে! ব্যাপারটা আসলে এমন কিছু বিচিত্র নয়। বারবার বলা হয়েছে আলোর বেগ c হচ্ছে

$c = 2.998\times10^8$ m/s

যারা ভাল করে লক্ষ করেছে তারা নিশ্চয়ই এটা লক্ষ করেছে যে আলোর এই বেগ হচ্ছে শূন্যে, কিন্তু আলো যদি কোনো মাধ্যমের ভেতর দিয়ে যায় তা হলে কিন্তু আলোর বেগ 2.998×10^8 m/s থাকে না, কমে যায়। আমরা সবাই প্রতিসারাঙ্ক বলে একটা জিনিসের নাম শুনেছি সেটা আর কিছুই না, শূন্যে আলোর বেগ এবং সেই মাধ্যমে আলোর বেগের ভাগফল। অর্থাৎ

$$\text{কোনো মাধ্যমের প্রতিসারাঙ্ক} = \frac{\text{শূন্যে আলোর বেগ}}{\text{সেই মাধ্যমে আলোর বেগ}}$$

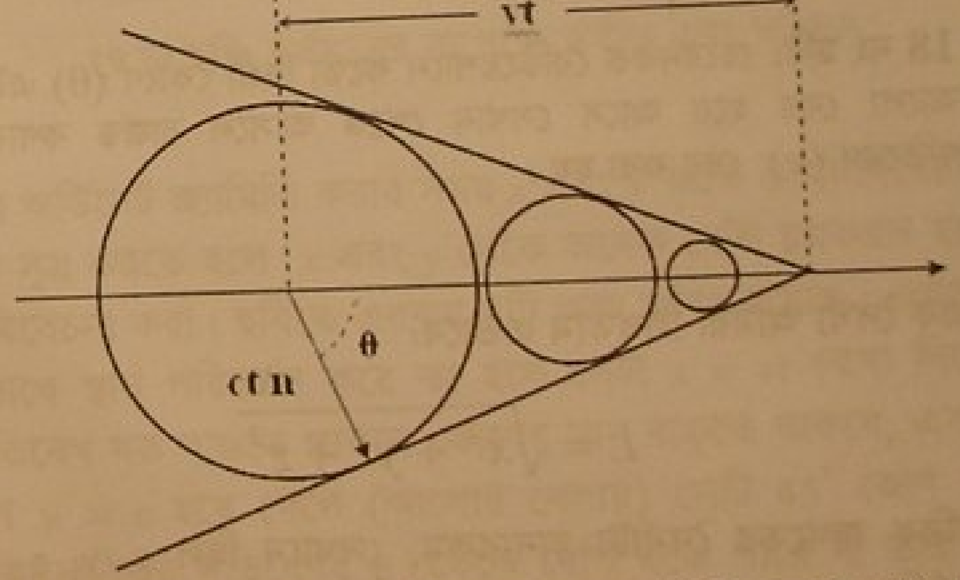
কাজেই আমরা যদি কোনো মাধ্যমের প্রতিসারাংক জানি তাহলে সেই মাধ্যমে আলোর বেগ চট করে বের করে ফেলতে পারি। অর্থাৎ:

পানির প্রতিসারাঙ্ক 1.33 পানিতে আলোর বেগ: 2.26×10^8 m/s

কাচের প্রতিসারাঙ্ক 1.45 কাচে আলোর বেগ: 2.00×10^8 m/s

কাজেই পানির ভেতর আলোর বেগ হচ্ছে 2.26×10^8 m/s অর্থাৎ আলো এর চাইতে বেশি বেগে যেতে পারবে না। কিন্তু একটা ইলেক্ট্রনের এর চাইতে বেশির বেগে যেতে কোনো বাধা নেই– যতক্ষণ পর্যন্ত ইলেকট্রন c থেকে বেশি বেগে যাচ্ছে না থিওরি অফ রিলেটিভিটির কোনো সমস্যা হচ্ছে না!

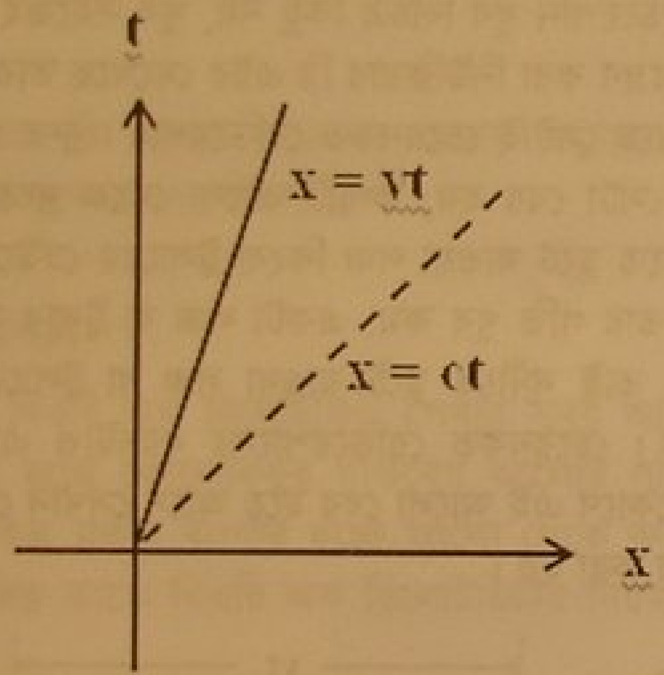
চেরেনকভ রেডিয়েশান খুব বিচিত্র কিছু নয়, খুব সহজেই এটা চোখে পড়ে। যারা পানি দিয়ে নিয়ন্ত্রণ করা নিউক্লিয়ার রি এক্টর দেখেছে তারা সেখানে যে অপূর্ব নীলাভ আলো দেখেছে সেটাই চেরেনকভ রেডিয়েশান। দ্রুত গতিতে ছুটে যাওয়া চার্জড কণা থেকে সেটা বের হয়, কণাটি আলো থেকে দ্রুত গতিতে যায় বলে সেটা অনেকটা নদীতে ছুটে যাওয়া লঞ্চ কিংবা ট্রলারের ঢেউয়ের মতন। পানিতে যে ঢেউ তৈরি হয় তার গতি খুব কম, একটা লঞ্চ বা ট্রলার সহজেই তার থেকে দ্রুত যেতে পারে। তাই নদীতে ছুটে যাওয়া লঞ্চ বা ট্রলারের ঢেউয়ের একটা বিশেষ ধরন থেকে। চেরেনকভ রেডিয়েশানের ধরনটাও একই রকম (17 নং ছবি), কতো ডিগ্রী কোণে এই আলো বের হয়ে আসে সেখান থেকে আসলে চার্জড কণার গতিবেগ বের করা হয়।



17 নং ছবি: চেরেনকভ রেডিয়েশানে কতো ডিগ্রী কোণে (θ) এই আলো বের হয়ে আসে সেখান থেকে আসলে চার্জড কণার গতিবেগ (v) বের করা হয়।

ওয়ার্ল্ড লাইন

আমাদের দৈনন্দিন জীবনে কোনো একটা বিন্দুকে নির্দিষ্ট করার জন্য আমাদের তিনটি দূরত্বের দৈর্ঘ্য দিতে হয় সেটা আগেই বলেছি। থিওরি অফ রিলেটিভিটি শিখতে গিয়ে আমরা আবিষ্কার করেছি ত্রিমাত্রিক জগতের তিনটি দৈর্ঘ্য দিয়েই একটা বিন্দুকে নির্দিষ্ট করা যথেষ্ট নয়। ত্রিমাত্রিক জগতের তিনটি দৈর্ঘ্যের সাথে সাথে সময়কেও নির্দিষ্ট করে দিতে হয়। অন্য অর্থে সময় হচ্ছে চতুর্থ মাত্রা এবং এই পরিচিত জগৎটা চর্তুমাত্রিক জগৎ! আমরা আরো বলেছিলাম কো অর্ডিনেট সিস্টেম যেভাবেই ঘোরানো হোক একটা জিনিসের দৈর্ঘ্য সমান থাকে। ঠিক সেরকম চতুমার্ত্রিক জগতেও কোনো একধরনের দৈর্ঘ্য সমান থাকে।



18 নং ছবি: চেরেনকভ রেডিয়েশানে কতো ডিগ্রী কোণে (θ) এই আলো বের হয়ে আসে সেখান থেকে আসলে চার্জড কণার গতিবেগ (v) বের করা হয়।

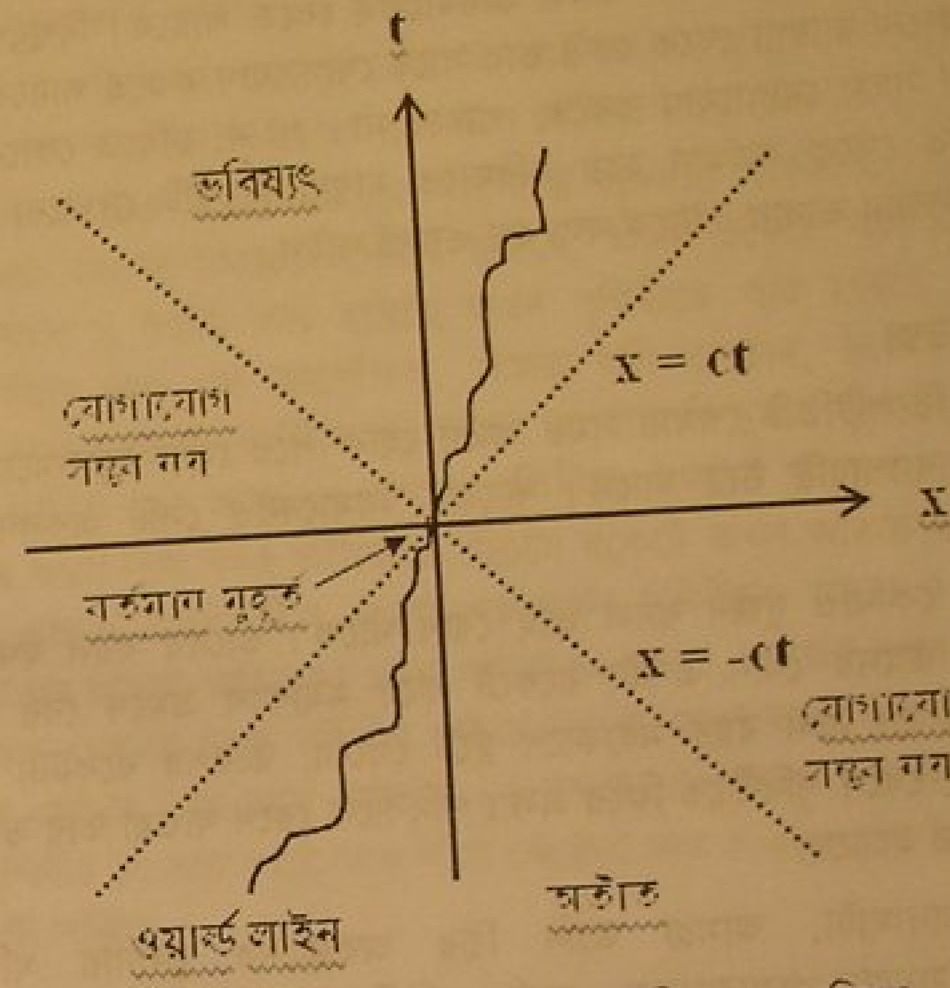
ত্রিমাত্রিক দৈর্ঘ্য আমরা লিখতাম এভাবে:

$$L = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

চর্তুমাত্রিক জগতের দৈর্ঘ্যটা অন্যরকম, সেখানে ছিল x, y, z এবং ict কাজেই চতুর্মাত্রিক জগতের দৈর্ঘ্য S হচ্ছে,

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2}$$

যেটা খুব গুরুত্বপূর্ণ সেটা হচ্ছে এখানে x^2, y^2 এবং z^2 পজিটিভ কিন্তু c^2t^2 নিগেটিভ যার অর্থ ত্রিমাত্রিক জগতে যার একটা দৈর্ঘ্য আছে চতুর্মাত্রিক জগতে তার দৈর্ঘ্য "0" হতে পারে–অর্থাৎ যার কোনো দৈর্ঘ্যই নেই!



19 নং ছবি: বর্তমানের সাপেক্ষে অতীত এবং ভবিষ্যৎ

আমরা কো অর্ডিনেট জ্যামিতি করার সময় x এবং y অক্ষে দৈর্ঘ্য বিবেচনা করেছি। আপেক্ষিক সূত্র করতে হলে x এবং y থেকে অনেক বেশি চমকপ্রদ হবে এবং x এবং ict বিবেচনা করা। ছবিতে এরকম দুটি অক্ষ আঁকা হয়েছে। কোনো বস্তু যদি সময়ের সাথে স্থান পরিবর্তন করে তা হলে সেটা $x = vt$ রেখা দিয়ে দেখানো যাবে। গতিবেগ যত বাড়তে থাকবে কোণের মান বাড়তে থাকবে, এবং সবচেয়ে বেশি বেগ $v = c$ হয়ে গেলে (আলোর বেলায়) সেটি 45° কোণ হয়ে যাবে। যেহেতু কোনোকিছুর গতিবেগই c থেকে বেশি হতে পারে না তাই এর চাইতে বেশি কোনো কোন রেখা হওয়া সম্ভব নয়। আমরা ইচ্ছে করলে পুরো ব্যাপারটি নিগেটিভ x এবং নিগেটিভ t এর জন্যেও বাড়াতে পারি এবং সেটা 19 নং ছবির মতো দেখাবে। এখানে $x = 0, t = 0$ হচ্ছে বর্তমান মুহূর্ত, ওপরের অংশটি হচ্ছে

ভবিষ্যৎ এবং নিচের অংশটি হচ্ছে অতীত। ছবিতে দেখানো $x = 0$, $t = 0$ বিন্দু বা বর্তমান মুহূর্তে যদি কেউ থাকে তা হলে তার সাথে $x = ct$ এবং $x = -ct$ রেখাদুটি দিয়ে আবদ্ধ অতীত থেকে কেউ তার সাথে যোগাযোগ করতে পারবে। একইভাবে বলা যায় এই মুহূর্তে ($x = 0, t = 0$ বিন্দুতে) যে আছে সে $x = ct$ এবং $x = -ct$ রেখা দিয়ে আবদ্ধ ভবিষ্যতেই যেতে পারবে। বিশ্বব্রহ্মাণ্ডে এর বাইরের কোনো জায়গা থেকে কেউ তার সাথে যোগাযোগ করতে পারবে না এবং সেও কারো সাথে যোগাযোগ করতে পারবে না। 19 নং ছবিতে কোনো একটা বস্তুর অতীত থেকে বর্তমান হয়ে ভবিষ্যতে যাবার বিষয়টি দেখানো হয়েছে। আপেক্ষিক সূত্রের ভাষায় এটাকে বলা হয় ওয়ার্ল্ড লাইন।

টুইন প্যারাডক্স

থিওরি অফ রিলেটিভিটি শেখার সময় আগে হোক পরে হোক সবসময়েই টুইন প্যারাডক্সের ব্যাপারটি উঠে আসে। কাজেই আমাদেরও সেটি একবার দেখা উচিৎ।

পৃথিবীর কোথাও দুজন যমজ ভাই বোন থাকে। তাদের বয়স যখন বিশ বৎসর তখন তাদের বোন একটা রকেটে করে মহাকাশ ভ্রমণে বের হলো। 0.995c বেগে সে তিন বছর মহাকাশে ছুটে গেলো, তারপর রকেটটা ঘুরিয়ে আবার 0.995c বেগে পৃথিবীতে ফিরে এল। পৃথিবীতে রেখে যাওয়া তার ভাই এর বয়স বেড়ে কত হয়েছে?

প্রশ্নটা সাদামাটা, আমরা জানি স্থির অবস্থানের তুলনায় গতিশীল কোনোকিছুতে সময়ের প্রসারণ হয়। অর্থাৎ পৃথিবীতে থাকা ভাইয়ের অতিক্রান্ত সময় যদি t এবং রকেটে থাকা যমজ ভাই বোনেরএর অতিক্রান্ত সময় যদি t_0 হয় তাহলে আমরা লিখতে পারি:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

অর্থাৎ

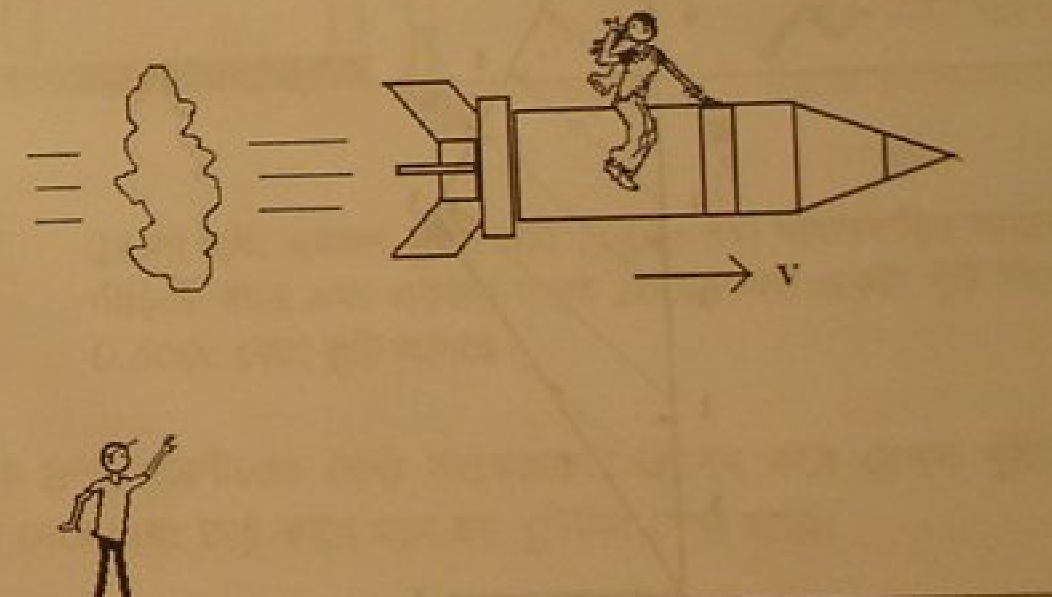
$$t = \frac{3}{\sqrt{1-\frac{(0.995)^2}{c^2}}} = 30\,years$$

ঠিক সেরকম ফিরে আসার সময়েও একই ব্যাপার। অর্থাৎ $t_0 = 3$ বছর হলে $t = 30$ বছর।

কাজেই রকেটে করে যে বোনটি যাচ্ছে তার অতিক্রান্ত সময় যখন $3 + 3 = 6$ years, যে ভাই পৃথিবীতে আছে তার কাছে মনে হবে অতিক্রান্ত সময় হচ্ছে $30 + 30 = 60$ years. অর্থাৎ রকেটে করে যমজ বোন পৃথিবীতে 6 বছর পর ফিরে এসে দেখবে তার বয়স 20 থেকে বেড়ে হয়েছে 26, কিন্তু পৃথিবীতে রেখে যাওয়া তার ভাই এর বয়স বেড়ে হয়েছে $20 + 60 = 80$ বছর, একজন থুরথুরে বুড়ো।

এতক্ষণ যেটুকু বলা হয়েছে কেউ কি তার থেকে কোনো সমস্যা বা বিভ্রান্তি পেয়েছে? যদি না পেয়ে থাকে তা হলে বলে দেখিয়ে দেয়া যাক।

পৃথিবীতে থাকা যমজ ভাইয়ের সাপেক্ষে রকেটের গতিবেগ 0.995c ছিল বলে আমরা বলেছি সময়ের প্রসারণ হয়েছে, অর্থাৎ রকেটে বসে থাকা যমজ বোনের যখন 3 বৎসর পার হয়েছে তখন পৃথিবীতে পার হয়েছে হয়েছে 30 বৎসর। কিন্তু বেগ তো আপেক্ষিক, আমরা যদি বলতাম, রকেটের সাপেক্ষে পৃথিবী 0.995c বেগে (উল্টোদিকে) যাচ্ছে তা হলে বিন্দুমাত্র ভুল হতো না! যার অর্থ রকেটে যে বসে আছে সে বলতো পৃথিবীতে সময়ের প্রসারণ হয়েছে! অর্থাৎ পৃথিবীতে যখন তিন বছর অতিক্রান্ত হয়েছে রকেটে তখন অতিক্রান্ত হয়েছে 30 বৎসর। এভাবে আরো তিন বৎসর পর যখন পৃথিবীতে আরো 3 বৎসর পার হয়েছে তখন রকেটে অতিক্রান্ত হতো আরো 30 বৎসর, কাজেই যখন রকেটে বসে থাকা যমজ বোনের সাথে পৃথিবীর ভাইয়ের দেখা হতো তখন দেখা যেত রকেটে করে যে এসেছে তার বয়স বেড়েছে 60 বৎসর, সে হয়েছে থুরথুরে 80 বছরের বুড়ি! পৃথিবীর যে রয়ে গেছে তার বয়স বেড়েছে মাত্র 6 এবং তার বয়স এখন 26 ! কোনটা সত্যি?

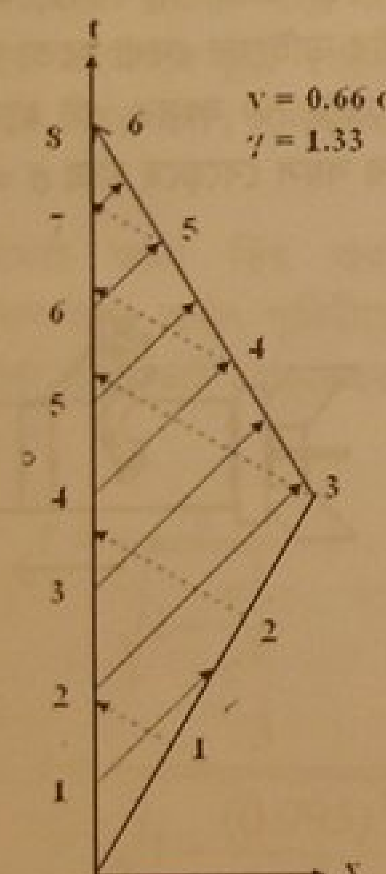


20 নং ছবি: যমজ ভাইকে পৃথিবীতে রেখে বোন একটা রকেটে করে মহাকাশ ভ্রমণে বের হলো

এটাকে বলা হয় টুইন প্যারাডক্স বা যমজ বিভ্রান্তি। সত্যি কথা বলতে কি এটা আসলে বিভ্রান্তি নয়। যে বিষয়টার সঠিক উত্তর নেই সেটা হচ্ছে বিভ্রান্তি। (যেমন কেউ যদি বলে "আমি মিথ্যা কথা বলছি" এবং তখন যদি জিজ্ঞেস করা হয় সে কি আসলে মিথ্যা কথা বলছে–সেটা হচ্ছে বিভ্রান্তি! কারণ এর সঠিক উত্তর নেই, উত্তর দুটোই হতে পারে!) কিন্তু এই টুইন প্যারাডক্সের বিজ্ঞানসম্মত উত্তর রয়েছে। তাই এর মাঝে কোনো বিভ্রান্তি নেই। বলা যেতে পারে, আমি একটু বিভ্রান্তির জন্ম দিয়েছি–অন্যায়ভাবেই!

পৃথিবীতে থাকা একজনকে স্থির ধরে তার তুলনায় রকেটে করে যাওয়া আর রকেটকে স্থির ধরে পৃথিবীকে গতিশীল ধরে নেয়া কিন্তু হুবহু এক ব্যাপার নয়। রকেটে করে যে যাচ্ছিল তাকে তিন বছর পরে রকেটের দিক পরিবর্তন করে আবার ফিরে আসতে হয়েছে। যে পৃথিবীতে ছিল তাকে কিছুই করতে হয় নি–কাজেই আমি যখন বলেছি রকেটে থাকা এবং পৃথিবীতে থাকা একই ব্যাপার, কারণ একজনের সাপেক্ষে অন্যে $0.995c$ বেগে যাচ্ছে কথাটা সত্যি নয়! দুটি ভিন্ন ব্যাপার এবং সে কারণে যখন দুজনের আবার দেখা হবে তখন একজনের বয়স বাড়বে মাত্র *6* অন্যজনের বাড়বে *60!*

বিষয়টা কেমন করে হয় সেটা দেখার জন্যে



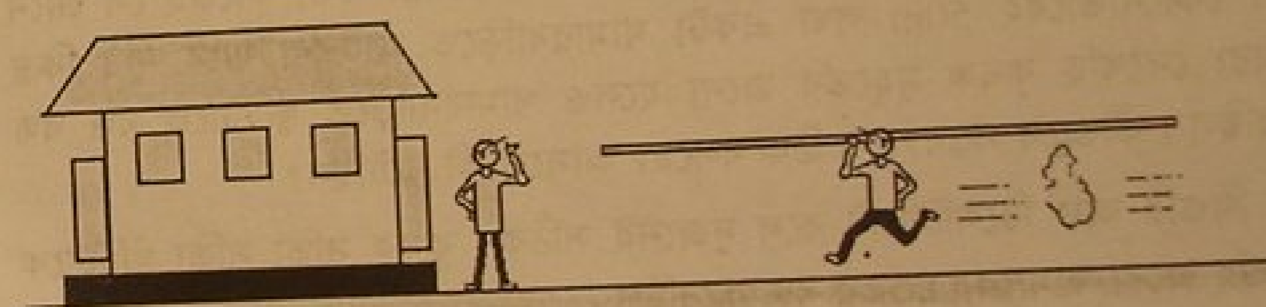
21 নং ছবি: পৃথিবীর ভাই এক বছর পর পর একটা করে আলোর সিগনাল রকেটের উদ্দেশে পাঠাচ্ছে, ঠিক সেরকম রকেটের বোনটিও এক বছর পর পর একটা সিগনাল পৃথিবীর উদ্দেশ্যে পাঠাচ্ছে

21 নং ছবিটা দেখা যেতে পারে। বিষয়টা সহজ করার জন্যে এই ছবিতে রকেটের বেগ ধরা হয়েছে 0.66c যার কারণে রকেটের যাত্রীর যখন 6 (ছয়) বছর সময় পার হয়েছে তখন পৃথিবীর যমজ ভাইয়ের পার হয়েছে 8 (আট) বছর। ছবিতে দেখানো হয়েছে পৃথিবীর ভাই এক বছর পর পর একটা করে আলোর সিগনাল রকেটের উদ্দেশে পাঠাচ্ছে, ঠিক সেরকম রকেটের বোনটিও এক বছর পর পর একটা সিগনাল পৃথিবীর উদ্দেশে পাঠাচ্ছে।

রকেটের বোন প্রথম তিন বছরে পৃথিবী থেকে মাত্র একটি সিগনাল পেয়েছে, পরের তিন বছরের ভেতর বাকি সাতটি সিগনাল পেয়েছে। পৃথিবীর ভাইটি প্রথম সাত বছরের ভেতর প্রথম তিনটি সিগনাল পেয়েছে। কিন্তু বাকি তিনটি পেয়েছে শেষ এক বছরের ভেতর!

কৃষক এবং খুঁটি

থিওরি অফ রিলেটিভিটির আরেকটা মজার সমস্যা হচ্ছে কৃষক এবং লম্বা খুঁটির সমস্যা। ধরা যাক একজন কৃষক তার *100m* লম্বা খামারবাড়ির সামনে দাঁড়িয়ে আছে। হঠাৎ তাকিয়ে দেখল একজন মানুষ *200m* লম্বা একটা খুঁটি নিয়ে *0.866c* বেগে ছুটে আসছে।



21 নং ছবি: একজন কৃষক তার *100m* লম্বা খামারবাড়ির সামনে দাঁড়িয়ে আছে এবং একজন মানুষ *200m* লম্বা একটা খুঁটি নিয়ে *0.866c* বেগে ছুটে আসছে।

কৃষক দ্রুত লরেন্টজের দৈর্ঘ্য সংকোচনের হিসেব করে দেখল খুঁটিটা সংকুচিত হয়ে গেছে এবং তার কাছে মনে হয় খুটিটার দৈর্ঘ্য হচ্ছে:

$$L = 200\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 200\sqrt{1-\left(\frac{0.866c}{c}\right)^2} = 100m$$

কাজেই তার মনে হলো সে পুরো খুঁটিটা তার খামারের ভেতর আঁটিয়ে ফেলতে পারবে! যখন খুঁটিটা পুরোপুরি খামারের ভেতর ঢুকেছে তখন সে দুই পাশের দরজা মুহূর্তের জন্যে বন্ধ করে দিল। কাজেই একেবারে মুহূর্তের জন্যে হলেও সে পুরো খুটিটা খামারের ভেতর রাখতে পেরেছে সেটা চিন্তা করে তার ভারি আনন্দ হলো!

তবে কৃষক তার খামারবাড়ির দরজাটা নিয়েও চিন্তায় ছিল তাই খুঁটির ধাক্কায় দরজা ভেঙে না যায় সেই ভয়ে মুহূর্তের জন্য দরজা বন্ধ করে দরজাটা আবার খুলে দিল যেন দৌড়বাজ মানুষটা খুঁটি নিয়ে বের হয়ে যেতে পারে।

এবারে খুঁটি হাতে দৌড়ে যাওয়া মানুষটার কাছে যাওয়া যাক। তার কাছে মনে হবে যে স্থির এবং খামারবাড়িটাই বুঝি 0.866c বেগে তার দিকে ছুটে আসছে। তাই 100m লম্বা খামার বাড়ীটার দৈর্ঘ্য তার কাছে মনে হবে মাত্র 50 m কারণ,

$$L = 100\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 100\sqrt{1-\left(\frac{0.866c}{c}\right)^2} = 50m$$

মানুষটিকে জানে তার হাতের খুটির দৈর্ঘ্য 200m লম্বা, কাজেই সে জানে এটা কোনোভাবেই 50m লম্বা একটা খামারবাড়িতে আটানো যাবে না। কিন্তু আমরা দেখেছি কৃষক মুহূর্তের জন্যে হলেও খামারবাড়িতে খুটিটাকে বন্ধ বন্ধ করেছিল। কীভাবে সম্ভব? কে ঠিক বলছে? আসলে কী ঘটেছিল?

থিওরি অফ রিলেটিভিটি বলে দুজনেই সঠিক। কৃষক সত্যি সত্যি খুঁটিটাকে মুহূর্তের জন্যে খামারের ভেতর বন্ধ করেছিল।

যে-মানুষটি খুঁটি নিয়ে ছুটে যাচ্ছিল সে একটা বিচিত্র দৃশ্য দেখেছিল! কৃষকের কাছে যেটা এক সময় তার কাছে সেটা এক সময় নয়, সেটা ভিন্ন সময়। সে দেখেছে খুঁটিটার সামনের ভাগ যখন ঠিক খামারবাড়ি ভেতর দিয়ে গিয়ে অন্য পাশের দরজার সামনে হাজির হয়েছে। কৃষক তখন দরজাটা মুহূর্তের জন্য বন্ধ করে আবার খুলে দিয়েছে যেন খুঁটিটা কোথাও না ধাক্কা খায়। খামারবাড়ি যে খুটিটার পিছনের অংশ যখন পৌঁছেছে তখন আবার সেই দরজাটা বন্ধ করে খুলে দেয়া হয়েছে। যে-মানুষটি খুঁটি নিয়ে ছুটে যাচ্ছে সে নিশ্চয়ই অবাক হয়ে ভাবছিল কৃষক কী করছে?

লরেন্টজের রূপান্তর দিয়ে আমরা বলতে পারি খুঁটি হাতের মানুষের সাপেক্ষে দুটি দরজা বন্ধ হবার সময় হচ্ছে

$$t_1' = \frac{t_1 + vx_1/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_2' = \frac{t_2 + vx_2/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

কাজেই দুটি দরজা বন্ধ করার মাঝে সময় হচ্ছে

$$t_1' - t_2' = \frac{\frac{v(x_1 - x_2)}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2(\frac{v}{c})(\frac{100}{c})$$

$$t_1' - t_2' = 2(0.866)(\frac{100}{c}) = \frac{173.2}{c} = 5.77\,ns$$

শক্তি ও ভরবেগ

আমরা থিওরি অফ রিলেটিভিটির প্রায় সবগুলো গুরুত্বপূর্ণ সূত্রই বের করে ফেলেছি। যেহেতু সবগুলোই করেছি শক্তি আর ভরবেগের মাঝের সূত্রটি আর বাকি থাকবে কেন? সেটাও বের করে ফেলা যাক। যদি ভর বেগকে বলি p তা হলে

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$pc = \frac{mvc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p^2c^2 = \frac{m^2v^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

ডানদিকে উপরে m^2c^4 যোগ এবং বিয়োগ করেঃ

$$p^2c^2 = \frac{m^2c^4 - m^2c^4 + m^2v^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$p^2c^2 = \frac{m^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{m^2c^4(1-\frac{v^2}{c^2})}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$p^2c^2 = E^2 - m^2c^4$$

কিংবাঃ $$E = \sqrt{p^2 + m^2c^4}$$

এই সূত্রটি শক্তি E এর সাথে ভরবেগ p এর সম্পর্কটি দেখায়। যদি ভরহীন কোনো কণা থাকে, $(m = 0)$ তাহলে তার জন্যে আমরা পাই

$$E = pc$$

আমরা যদি বলতাম ভরবেগ $p = mv$ তাহলে যদি $m = 0$ হয় তাহলে $p = 0$ হয়ে যাবে। কিন্তু থিওরি অফ রিলেটিভিটির কারণে $m = 0$ হবার পরও $E = 0$ না হলে তার ভরবেগ থাকতে পারে এবং সেটা হচ্ছে $p = E/c$

যেটা সব সময়েই সত্যি!

প্রশ্ন এবং উত্তর

1. একটা রকেটের দৈর্ঘ্য 100m, যখন এটা উড়ে যাচ্ছে তখন তোমার মনে হল এটার দৈর্ঘ্য 99m, রকেটটা কত বেগে উড়ে যাচ্ছে?

উত্তরঃ রকেটটাকে তার প্রকৃত দৈর্ঘ্য থেকে সংকুচিত মনে হবে। লরেন্টজ সংকোচন অনুযায়ী লেখা যায়

$$99m = 100\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}m$$

অর্থাৎঃ $$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{99}{100}$$

অথবা, $$1-\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{99}{100}\right)^2$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1-\left(\frac{99}{100}\right)^2$$

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{99}{100}\right)^2} = 0.141c$$

অর্থাৎ, রকেটটা আলোর 0.141 বেগে যাচ্ছে। নিখুতভাবে বললে বলতে হয়ঃ $v = 0.421 \times 10^8 m/s$

2. একটা রকেট 0.98c বেগে পৃথিবী থেকে রওনা দিয়েছে। পৃথিবীতে থাকা একজন মানুষের সময় অনুযায়ী রকেটের একটা ঘড়ির মিনিটের কাঁটা কতক্ষণে পুরো একবার ঘুরে আসবে?

উত্তরঃ পৃথিবীর তুলনায় রকেটে সময়ের প্রসারণ ঘটবে, কাজেই ঘড়ির মিনিটের কাটা একবার ঘুরে আসবে, অর্থাৎ এক ঘণ্টায় সেটা প্রসারিত হয়ে হবেঃ

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{0.98c}{c})^2}} = 5.02 hours$$

3. একটা রকেট পৃথিবী থেকে 300m/s বেগে রওনা দিয়েছে। কত বছর পর পৃথিবীর ঘড়ি এবং রকেটের ঘড়ির সময়ের মাঝে পার্থক্য হবে 1 s

উত্তরঃ পৃথিবীতে যখন t সময় অতিক্রান্ত হয়েছে ধরা যাক রকেটে তখন t′ সময় অতিক্রান্ত হয়েছে, এবং আপেক্ষিক সূত্রের সময়ের প্রসারণের ব্যবহার করে আমরা লিখতে পারিঃ

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

এখানে v মাত্র 300m/s কাজেই $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ খুবই ছোট সংখ্যা। এ কারণে কোনো বড় ভুল না করেই আমরা বাইনোমিয়াল এক্সপানসান করতে পারি। অর্থাৎ লিখতে পারি

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2}x^2 + \ldots\ldots$$

আমাদের ক্ষেত্রে $x = \left(\frac{v}{c}\right)^2, n = -\frac{1}{2}$

অর্থাৎ, $\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cong 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

এর পরের সংখ্যাগুলো এতো ছোট যে আমাদের নেয়ার প্রয়োজন নেই। কাজেইঃ

$$t' = t\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

$$t' - t = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 t$$

এখানে (t − t′) যদি 1 সেকেন্ড হয় তাহলে

$$1 = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 t$$

অর্থাৎ, $t = 2(\frac{c}{v})^2 \sec$

$$t = 2\left(\frac{3\times10^8}{3\times10^2}\right)^2 = 2\times10^{12} s$$

এক বছর সমান $\pi\times10^7 s$ (এখানে π-এর কোনো গুরুত্ব নেই, ঘটনাক্রমে এটি π এর কাছাকাছি, তাই এভাবে লিখলে মনে রাখার জন্যে খুব সুবিধে!)

$$t = \frac{2\times10^{12}}{3.14\times10^7} = 6.36\times10^4\ year$$

কিংবা 63 হাজার বছর!

4. কোনো একটি কণার স্থায়িত্ব $10^7 s$, যখন এটি স্থির অবস্থায় থাকে। এর গতিবেগ যদি $0.99c$ হয় তা হলে কণাটি তার জীবদ্দশায় কতটুকু যেতে পারে?

উত্তরঃ স্থির অবস্থায় থাকা একজনের কাছে মনে হবে কণাটির সময়ের প্রসারণ হয়েছে, তাই এর জীবদ্দশা বেড়ে গেছে। কাজেই তার স্থায়িত্বকাল মনে হবেঃ

$$t = \frac{10^{-7}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} s = \frac{10^{-7}}{\sqrt{1-(0.99)^2}} = 7.09\times10^{-7}\, s$$

কাজেই কণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব S হবে:

$$\begin{aligned} S &= vt \\ &= (0.99c)\times(7.09\times10^{-7})\text{ m} \\ &= (0.99\times2.99\times10^{8})\ (7.09\times10^{-7})\text{ m} \\ &= 2.098\times10^{2}\text{ m} \end{aligned}$$

অর্থাৎ আনুমানিক 210 m.

5. একজন মানুষ দেখছে বিপরীত দিক থেকে দুটি মহাকাশযান তার দিকে আসছে। একটার গতিবেগ 0.8c অন্যটার গতিবেগ 0.9c, একটি মহাকাশযানের যাত্রীর কাছে অন্যটির গতিবেগ কত মনে হবে?

উত্তর: আমাদের দৈনন্দিন বেগের হিসেবে, আপেক্ষিক গতি হওয়ার কথা 0.9c + 0.8c =1.7c, কিন্তু আমরা জানি যখন গতিকে আলোর বেগের কাছাকাছি হয়ে যায় তখন বেগ এভাবে যোগ করে ফেলা যায় না। একটি বেগ v_1 অন্যটি v_2 হলে তাদের আপেক্ষিক বেগ v হবে:

$$v = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1}{c}\frac{v_2}{c}} = \frac{(0.9+0.8)c}{1+0.9\times0.8} = 0.988c$$

6. কোনো একজন মানুষ একটি ল্যাবরেটরির সাপেক্ষে + x দিকে 2.9 × 10⁸ m/s †বগে যাচ্ছে। মানুষটির কাছে মনে হলো তার সাপেক্ষে -x দিকে দ্বিতীয় একজন 2.988 × 10⁸ m/s বেগে যাচ্ছে। ল্যাবরেটরির সাপেক্ষে দ্বিতীয় মানুষটির বেগ কত?

উত্তর: ধরা যাক ল্যাবরেটরির সাপেক্ষে এখন মানুষটির বেগ v_1 , দ্বিতীয় মানুষটি বেগ v_2 এবং প্রথম মানুষটির সাপেক্ষে দ্বিতীয় মানুষটি বেগ v অর্থাৎ

$$v = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1}{c}\frac{v_2}{c}}$$

যেখানে $v_1 = 2.9\times10^{8}$ m/s, $v_2 = 2.988\times10^{8}$ m/s আমরা আমাদের সমস্যাগুলো সমাধান করার জন্যে দশমিকের পর দুই ঘর নিয়েছি। এখানে যেহেতু v এর মান দশমিকের পর তিন ঘর দেয়া হয়েছে তাই সব জায়গাতেই দশমিকের পর তিন ঘর নিতে হবে। আমরা সাধারণত $c = 3.00\times10^{8}\ m/s$ ব্যবহার করি, এই সমস্যাটির জন্যে দশমিকের পরে তিন ঘর অর্থাৎ 2.998 ব্যবহার করব। কাজেই:

$$v_1 = 2.900\times10^{8}\, m/s$$

$$\beta_1 = \frac{v_1}{c} = \frac{2.900\times10^{8}}{2.998\times10^{8}} = 0.967$$

$$v_2 = 2.988\times10^{8}\, m/s$$

$$\beta_2 = \frac{v_2}{c} = \frac{2.988\times10^{8}}{2.998\times10^{8}} = 0.997$$

কাজেই আমরা লিখতে পারি:

$$\beta = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$$

অথবা

$$\beta(1+\beta_1\beta_2) = \beta_1+\beta_2$$

$$\beta+\beta\beta_1\beta_2 = \beta_1+\beta_2$$

$$\beta_2(1-\beta\beta_1) = \beta-\beta_1$$

$$\beta_2 = \frac{\beta-\beta_1}{1-\beta\,\beta_1}$$

অর্থাৎ

$$\beta_2 = \frac{0.997-0.967}{1-0.997\times0.967} = 0.836$$

$$v_2 = 0.836c = 0.836\times2.998\times10^{8} = 2.506\times10^{8}\text{ m/s}$$

7. মাটিতে একজন মানুষের ভর 100 kg, যখন সে একটা রকেটে করে যাচ্ছিল তখন মাটিতে থাকা একজনের মনে হল তার ভর বেড়ে 101 kg হয়ে গেছে। রকেটটা কত বেগে যাচ্ছিল?

উত্তরঃ আমরা জানি আপেক্ষিক ভর হচ্ছে $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

যেখানে m_0 হচ্ছে স্থির অবস্থানের ভর। কাজেই আমরা লিখতে পারিঃ

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0}{m}$$

$$1-\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{m_0}{m}\right)^2$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^2$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^2}$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{100}{101}\right)^2} = 0.14$$

কাজেই $\quad v = 0.14c = 0.14 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s} = 4.2 \times 10^7 \text{ m/s}$

8. একটা ইলেকট্রনের ভর একটা প্রোটনের ভরের সমান হওয়ার জন্য তাকে কত জোরে ছুটে যেতে হবে?

উত্তরঃ ইলেকট্রনের ভরঃ 9.11×10^{-31} kg

প্রোটনের ভরঃ 1.67×10^{-27} kg

যদি v বেগে যাবার সময় ইলেকট্রনের ভর প্রোটনের ভরের সমান হয় তা হলেঃ

$$1.67 \times 10^{-27} = \frac{9.11 \times 10^{-31}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{9.11 \times 10^{-31}}{1.67 \times 10^{-27}}$$

$$(1-\frac{v^2}{c^2}) = 5.45 \times 10^{-4}$$

অর্থাৎ $\quad \dfrac{v^2}{c^2} = 1 - 5.45 \times 10^{-4}$

দেখাই যাচ্ছে v নিশ্চয়ই c এর খুব কাছাকাছি। কতটুকু কাছাকাছি সেটা এভাবে বের করা সহজঃ

ধরে নিই v এর সমান মান হচ্ছে $v = (1-\varepsilon)\,c$

যেখানে ε একটা খুব ছোট সংখ্যা।

যেহেতু $\quad \left(\dfrac{v}{c}\right)^2 = 1 - 5.45 \times 10^{-4}$

$$\frac{(1-\varepsilon)^2 c^2}{c^2} = 1 - 5.45 \times 10^{-4}$$

যেহেতু ε^2 খুব ছোট

$$1 - 2\varepsilon \cong 1 - 5.45 \times 10^{-4}$$

অর্থাৎ $\quad \varepsilon = \dfrac{5.45 \times 10^{-4}}{2} = 2.725 \times 10^{-4}$

কাজেই আমরা বলতে পারি ইলকট্রনের গতিবেগ হবে

$$v = 0.9997275c$$

9. 0.1Mev ইলেকট্রনের গতিশক্তি কত, আপেক্ষিক সূত্র না থাকলে এবং আপেক্ষিক সূত্র ব্যবহার করে।

উত্তর: Mev হচ্ছে মিলিওন ইলেকট্রন ভোল্ট, এটাকে দেখেও মোটেও শক্তির ইউনিট মনে হচ্ছে না, কিন্তু এটা আসলে সত্যিই শক্তির ইউনিট। একটা ইলেকট্রনের চার্জ হচ্ছে $e=-1.60\times10^{-19}$Coulomb

প্রোটনের চার্জের পরিমাণ সমান কিন্তু সেটা পজিটিভ। যদি একটা ইলেকট্রনকে 1 মিলিওন ভোল্ট দিয়ে শক্তি প্রদান করা হয় তাহলে তার শক্তিকে বলা হয় 1 Mev. অর্থাৎ 1Mev হচ্ছে

$$1\text{Mev} = (1.60\times10^{-19})\times10^{6} = 1.60\times10^{-13}\text{ Joul}$$

ইলেকট্রনের ভর হচ্ছে 9.11×10^{-31} kg, তার পুরোটুকু শক্তিতে রূপান্তরিত করলে সেটা হবে

$$m_0c^2 = 9.11\times10^{-31}\times(3\times10^{8})^2 = 8.20\times10^{-14}\text{ Joul}$$

আমরা ইচ্ছে করলে এই শক্তিটাকে Mev দিয়ে প্রকাশ করতে পারি। অর্থাৎ:

$$m_0c^2 = \frac{8.20\times10^{-14}}{1.60\times10^{-13}} = 0.512Mev$$

অর্থাৎ ইলেকট্রনের ভরের কারণে তার ভেতর যে শক্তি থাকে সেটা হচ্ছে 0.512 Mev. পদার্থবিজ্ঞানের যে-শাখায় পারমাণবিক বা মহাজাগতিক কণা নিয়ে আলোচনা করে সেখানে রুটিন মাফিক একটা কণার ভর বলার সময় অনেক সময়েই স্থিতাবস্থায় থাকার সময় সঞ্চিত শক্তিকে তার ভর বলে উল্লেখ করা হয়। অর্থাৎ

ইলেকট্রনের ভর: 0.512 Mev

প্রোটনের ভর: 942 Mev

এবার আমরা মূল প্রশ্নে ফিরে আসি, ইলেকট্রনের গতিশক্তি 0.1 Mev হলে তার গতিবেগ কত। যদি আমরা আপেক্ষিক সূত্র ব্যবহার না করি তা হলে লিখতে পারি:

$$\text{গতি শক্তি} = \frac{1}{2}mv^2 = 0.1\text{Mev} = 0.1\times1.60\times10^{-13}\text{ Joul}$$

$$v^2 = \frac{2\times0.1\times1.60\times10^{-13}}{m}$$

$$v^2 = \frac{2\times0.1\times1.60\times10^{-13}}{9.11\times10^{-31}} = 3.51\times10^{16}$$

$$v = 1.87\times10^{8}\text{m/s} = 0.561c$$

আপেক্ষিক সূত্র ব্যবহার করলে আমাদের লিখতে হবে:

$$0.1Mev = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2$$

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = (m_0c^2 + 0.1)Mev$$

এখানে m_0c^2 এর জায়গায় আমরা 0.512 Mev লিখতে পারি

$$\frac{0.512Mev}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = (0.512+0.1)Mev$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{0.512}{0.612}$$

$$1-\frac{v^2}{c^2} = 0.837$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1-0.837$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{0.163}$$

কাজেই $v = 0.40c$